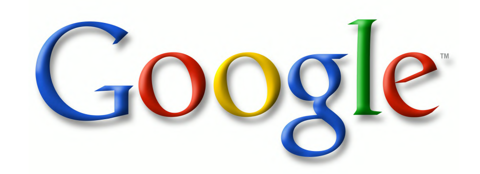


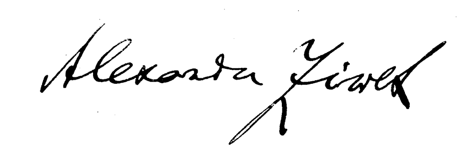
BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET

Graduate Library
University of Michigan

Preservation Office

Storage Number: ______________________

ACA1497
UL FMT B RT a BL m T/C DT 07/18/88 R/DT 07/18/88 CC STAT mm E/L 1
035/1: : |a (RLIN)MIUG86-B62991
035/2: : |a (CaOTULAS)160324077
040: : |a MiU |c MiU
100:1 : |a Hess, Wilhelm, |d 1858-
245:00: |a Über die Euler'schen bewegungsgleichungen und deren singuläre lösungen ...
260: : |a Bamberb, |b W. Gärtner'sche buchdruckerei (D. Siebenkees) |c 1889.
300/1: : |a 60 p.
650/1: 0: |a Kinematics
998: : |c DPJ |s 9124



Über die

Euler'schen Bewegungsgleichungen

und

deren singuläre Lösungen.

Bamberg 1889.
W. Gärtner'sche Buchdruckerei (D. Siebenkees).

Ziel der Arbeit.

Das Problem der Rotation eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt konnte bislang nur für zwei Fälle als lösbar bezeichnet werden: bei beliebiger Gestalt des Körpers für die Bewegung um den Schwerpunkt, und bei der Annahme zweier gleicher Hauptträgheitsmomente für die Drehung um einen Punkt, welcher auf der dritten Hauptaxe gelegen war.

Zur Verfolgung der ersteren Bewegungsart liessen sich zwei völlig verschiedene Wege einschlagen: ein analytischer, repräsentirt durch die Arbeit Jacobi's sur la rotation d'un corps[1]) und ein synthetischer, vorgezeichnet von Poinsot in seiner théorie nouvelle de la rotation des corps[2]).

Die zweite Bewegung, des „Gyroscops", dagegen hatte lange Zeit nur eine analytische Darstellung, durch Lottner[3]) erfahren und wurde erst in neuerer Zeit Gegenstand einer synthetischen Behandlungsweise im Sinne Poinsot's. Insbesondere hatten es sich verschiedene Untersuchungen des Verfassers[4]) zum Zwecke gesetzt, eine dahin zielende Durch-

---

[1]) C. G. J. Jacobi's gesammelte Werke. II. 289—352. 1882.

[2]) Liouville's Journal. 1851. 9—129 und 289—336.

[3]) E. Lottner, Reduction eines schweren, um einen festen Punkt rotirenden Revolutionskörpers auf die elliptischen Transcendenten. Crelle's Journal. L. 111—125.

[4]) W. Hess, Über das Gyroscop. Mathematische Annalen XIX. 121—154. — Über die Bewegung der Axe eines Gyroscops, Carl's Repertorium. XVIII. 233—243. — Über das Gyroscop bei allgemeinster Wahl des zur Bewegung anregenden Momentankräftesystems. Math. Ann. XXIX. 500—580.

flechtung von analytischem Ausdrucke mit mechanisch-geometrischer Deutung herbeizuführen und so das fragliche Problem auch nach der synthetischen Seite möglichst vollständig abzurunden.

Das vergangene Jahr hat noch eine dritte Möglichkeit der Lösung des Rotationsproblems erwiesen: in einer von der französischen Akademie der Wissenschaften preisgekrönten Abhandlung hat Sophie Kowalevski[5]) den Nachweis erbracht, dass die Bewegung eines Körpers, dessen Schwerpunkt in einer Hauptebene gelegen ist, während die Trägheitsmomente um die zwei Hauptaxen dieser Ebene je gleich dem doppelten dritten Momente sind, festgelegt werden könne durch hyperelliptische (Rosenhain'sche) Funktionen.

Es drängt sich nun aber die Frage auf, ob wirklich mit den drei vorstehenden Annahmen die Lösung des vorwürfigen Problems als abgeschlossen zu betrachten sei, oder ob solche auch noch für weitere Voraussetzungen fixirt werden könne:

Wie bekannt, ist die instantane Bewegung eines um einen festen Punkt drehbaren Körpers definirt durch die drei dynamischen Gleichungen von Euler in Verbindung mit einer Anzahl Differentialgleichungen kinematischer Natur. Für letztere aber ist nachgewiesen, dass sie, wenn einmal die Euler'schen Gleichungen integrirt sind, nach Ausführung nur einer einzigen Quadratur von dem ganzen Verlaufe der Drehung Kenntniss geben — es concentrirt sich also, da eine Quadratur im Sinne der Mechanik als Lösung gelten kann, das gesammte Interesse auf die Integretion der drei Euler'schen Bewegungsgleichungen allein.

Speciell hat sich der Verfasser hier zum Ziele gesetzt, die allgemeinen singulären Lösungen der Euler'schen Bewegungsgleichungen zu finden und damit das berühmte Problem der Rotation nach einer neuen Richtung hin abzugrenzen.

5) Sophie Kowalevski, Sur le problème de la rotation d'un corps autour d'un point fixe. Acta mathematica. XII. 177—232. 1889.

Der Umfang der Untersuchung liess es dabei als nothwendig erscheinen, dieselbe auf zwei Jahrgänge des Programmes zu vertheilen, in der Weise, dass in dem gegenwärtigen aus den Criterien der Singularität der allgemeinste Fall einer Bewegungsart von singulärem Charakter herausgeschält erscheint, während die übrigen, nicht allgemeinen Fälle, sowie die Ausdehnung der ganzen Frage auf das Problem des Gleichgewichtes des unendlich dünnen elastischen Stabes einer späteren Erörterung vorbehalten bleiben.

Ohne den Resultaten im Einzelnen vorgreifen zu wollen, möge das Hauptergebniss der nachfolgenden Erörterungen doch bereits an dieser Stelle formulirt werden. Es zeigt sich:

Neben der Bewegung des Gyroscops einschliesslich derjenigen des zusammengesetzten Pendels als einer Bewegung von singulärem Charakter gibt es noch ein zweites Bewegungsphänomen allgemeiner Natur, welchem die Eigenschaft einer singulären Lösung des Rotationsproblems zukommt: die Drehung eines Körpers, dessen Schwerpunkt in einer Hauptebene gelegen ist, während das Trägheitsmoment um die „Axe der Figur“ die vierte geometrische Proportionale bildet zwischen den Trägheitsmomenten um die Hauptaxen der kritischen Ebene einerseits und um die dritte Hauptaxe andererseits — vorausgesetzt, dass die Axe des momentan anregenden Kräftepaars stets senkrecht stehe zur Figuraxe.

Diese neue Möglichkeit der Lösung, welche eine gewisse Analogie zeigt mit der Kowalevski'schen Drehungsart reducirt die drei Euler'schen Bewegungsgleichungen auf eine einzige Differentialgleichung. Letztere ist sofort integrabel, sobald die Axe des angreifenden Paares horizontal angenommen wird.

Einleitung.

§ 1.

Die drei Hauptträgheitsaxen des Körpers durch den festen Punkt O seien X', Y', Z', die Hauptträgheitsmomente um dieselben A, B, C, das Maximalmoment der Schwerkräfte P, ferner die Neigungscosinus der drei Hauptaxen: gegen die Figuraxe α, β, γ; gegen die feste Richtung Z der Schwere a'', b'', c'', und gegen zwei hiezu senkrechte Richtungen X, Y bezw. a, b, c und a', b', c'. Sind nun die Componenten der instantanen Drehgeschwindigkeit um die Hauptaxen p, q, r, so sind die Componenten des Momentankräftepaars, welches diese Geschwindigkeiten hervorrief, Ap, Bq, Cr und es lauten die Euler'schen Bewegungsgleichungen[1]):

$$(1)\left\{\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= (B - C)\,qr + P\,(\beta c'' - \gamma b'') \\ B\frac{dq}{dt} &= (C - A)\,rp + P\,(\gamma a'' - \alpha c'') \\ C\frac{dr}{dt} &= (A - B)\,pq + P\,(\alpha b'' - \beta a''). \end{aligned}\right.$$

Die Cosinus a'', b'', c'' sind mit den Winkelgeschwindigkeiten p, q, r und der Zeit t verknüpft durch die Gleichungen:

$$(2)\left\{\begin{aligned} \frac{da''}{dt} &= b''r - c''q \\ \frac{db''}{dt} &= c''p - a''r \\ \frac{dc''}{dt} &= a''q - b''p, \end{aligned}\right.$$

[1]) Man vgl. etwa Poisson, traité de mécanique, t. II, nº 413 der 2. Auflage.

welche nach vorzunehmender cyclischer Vertauschung auch für die Tripel a, b, c; a′ b′ c′ zu Recht bestehen.

Wie schon eingangs erwähnt, ist das Problem der Rotation mit der Aufstellung von p, q, r; a″, b″, c″ in Funktionen der Zeit als gelöst zu betrachten, weil es nur noch der Ausführung einer einzigen Quadratur bedarf, um auch die übrigen 6 Neigungscosinus durch die Zeit ausgedrückt zu erhalten.

Das hierauf abzielende Verfahren von Weierstrass[1]) ist das folgende. Es ist identisch

$$d \log (c \pm ic') = \frac{dc \pm idc'}{c \pm ic'} = \frac{(cdc + c'dc) \pm i\,(cdc' - c'dc)}{c^2 + c'^2}$$

Aus den erweiterten Formeln (2) fliesst aber

$$\frac{dc}{dt} = aq - bp$$

$$\frac{dc'}{dt} = a'p - b'p$$

$$c\frac{dc'}{dt} - c'\frac{dc}{dt} = (ca' - ac')\,q - (cb' - bc')\,p.$$

Wie bekannt, liefern nun die (zweimal) sechs Gleichungen der orthogonalen Transformation:

$$\Sigma\, a^2 = 1$$
$$\Sigma\, bc = 0,$$

die Relationen

$$a'' = bc' - b'c$$
$$b'' = ca' - c'a \text{ u. s. f.},$$

es wird also durch Substitution

$$d \log (c \pm ic') = \frac{-c''\,dc'' \pm idt\,(a''p + b''q)}{1 - c''^2}$$

d. h. es können, sobald die Grössen p, q, r und a″, b″, c′, der Euler'schen Gleichungen durch t ausgedrückt vorliegen, c und c′ durch Integration gefunden werden.

Mit letzteren Cosinus sind aber zugleich auch die vier

[1]) Hoffmann-Natani, Mathematisches Wörterb., Titel „Rotation“.

anderen, a, a'; b, b' gegeben: denn es gelten identisch die Gleichungen

$$(a \pm ia')(c \mp ic') = (ac + a'c') \pm i(a'c - ac') = -a''c'' \pm ib''$$
$$(b \pm ib')(c \mp ic') = (bc + b'c') \pm i(b'c - bc') = -b''c'' \mp ia''.$$

Verschiedene Formen der Euler'schen Bewegungsgleichungen.

§ 2.

Erste Form.

Als solche kann naturgemäss die Zusammengehörigkeit der 6 Differentialgleichungen (1) und (2) bezeichnet werden, welche als abhängige Veränderliche die 6 Grössen p, q, r; a'', b'', c'' enthalten. Die Anzahl der vorkommenden unabhängigen Constanten beträgt zunächst ebenfalls 6 — A, B, C, P und zwei der Cosinus α, β, γ — dieselbe kann jedoch auf 5 vermindert werden, wenn man die Verhältnisse einführt zwischen den 3 Trägheitsmomenten A, B, C einerseits und dem Momente P der Schwerkräfte andererseits (oder, was dasselbe ist, P = 1 setzt). Indess ist es für nicht rein algebraische Betrachtungen von Vortheil, die ursprüngliche Bedeutung der genannten Momente beizubehalten.

§ 3.

Zweite Form.

Wir erhalten dieselbe, indem wir das System der drei Differentialgleichungen (2) durch ein solches von Integralgleichungen ersetzen und aus diesem dann die Werthe von a'', b'', c'' in die Gleichungen (1) substituiren: wir multipliciren die Gleichungen (2) mit a'', b'', c''; die Gleichungen (1) mit a'', b'', c'' und (2) mit Ap, Bq, Cr; die Gleichungen (1) mit p, q, r, addiren jedesmal und integriren. Dann kommt:

$$(3)\begin{cases} a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1 \\ a''Ap + b''Bq + c''Cr = \lambda \\ a''\alpha + b''\beta + c''\gamma = \dfrac{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - h}{2P} = \mu \end{cases}$$

Darin bedeuten λ und h zwei Constante, nemlich λ das constant bleibende Moment des Momentankräftepaars um die Verticalaxe OZ, und h den Unterschied zwischen der lebendigen Kraft $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$ der Drehung und zwischen der (vom Schwerpunkt des Körpers) beim Sinken geleisteten Arbeit. μ ist direkt der Neigungscosinus des Winkels zwischen der Axe OS der Figur und OZ der Schwere. Um aus den Gleichungen (3) a'', b'', c'' selbst zu bekommen, setzen wir die Combinationen

$$(4)\quad \begin{aligned} & A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \nu \\ & Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 \;[= 2P\mu + h] = \mu_1 \\ & p^2 + q^2 + r^2 = \tau \\ & Ap\alpha + Bq\beta + Cr\gamma = \varrho \\ & p\alpha + q\beta + r\gamma = \sigma \end{aligned}$$

Von denselben repräsentiren ν das Quadrat der Grösse des anregenden Momentankräftepaars, τ das Quadrat der Grösse der instantanen Drehgeschwindigkeit, ϱ und σ die Projectionen des Paares und der Drehgeschwindigkeit auf die Figuraxe und endlich μ_1, wie bereits erwähnt, die lebendige Kraft der Rotation.

Nun ist die Determinante der Coëfficienten von a'', b'', c'' in dem System der simultanen Gleichungen (3)

$$\boldsymbol{N} = \begin{vmatrix} a'' & b'' & c'' \\ Ap & Bq & Cr \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix},$$

deren Quadrat

$$N = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \mu \\ \lambda & \nu & \varrho \\ \mu & \varrho & 1 \end{vmatrix},$$

welche Form nur Funktionen von p, q, r enthält. Nach

einem von Combescure[1]) angegebenen Verfahren bestehen dann die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
& a'' \, . \, N_1 - Ap \, . \, N_\lambda + \alpha \, . \, N_\mu = \sqrt{N} \, . \, \boldsymbol{N}_{a''} \\
(5) \quad & b'' \, . \, N_1 - Bq \, . \, N_\lambda + \beta \, . \, N_\mu = \sqrt{N} \, . \, \boldsymbol{N}_{b''} \\
& c'' \, . \, N_1 - Cr \, . \, N_\lambda + \gamma \, . \, N_\mu = \sqrt{N} \, . \, \boldsymbol{N}_{c''},
\end{aligned}
$$

worin die Indices die jeweiligen Unterdeterminanten der Determinanten N und $\boldsymbol{N}$ anzeigen, während das Zeichen der Wurzel in diese selbst eingeschlossen sein mag.

Durch Einführung der also gewonnenen Werthe von a'', b'', c'' wird nach einfacher Reduction das Gleichungssystem (1) zu dem folgenden, welches nur p, q, r als abhängige Veränderliche enthält:

$$
\begin{aligned}
& A\frac{dp}{dt} = (B - C)\,qr + \frac{P}{N_1}\Big[(Ap - \alpha\varrho)\sqrt{N} - \boldsymbol{N}_{a''} N_\lambda\Big] \\
(6) \quad & B\frac{dq}{dt} = (C - A)\,rp + \frac{P}{N_1}\Big[(Bq - \beta\varrho)\sqrt{N} - \boldsymbol{N}_{b''} N_\lambda\Big] \\
& C\frac{dr}{dt} = (A - B)\,pq + \frac{P}{N_1}\Big[(Cr - \gamma\varrho)\sqrt{N} - \boldsymbol{N}_{c''} N_\lambda\Big]
\end{aligned}
$$

§ 4.

Dritte Form.

Die Ausgangsgleichungen (1) mögen der Reihe nach mit Ap, Bq, Cr; α, β, γ; p, q, r multiplicirt und addirt werden, so ergeben sich unter Berücksichtigung der Relationen (4) die Determinanten

$$
\frac{d\nu}{dt} = 2P \, . \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a'' & b'' & c'' \\ Ap & Bq & Cr \end{vmatrix} = 2P \, . \, \boldsymbol{N}
$$

$$
(7) \quad \frac{d\varrho}{dt} = \begin{vmatrix} a & \beta & \gamma \\ Ap & Bq & Cr \\ p & q & r \end{vmatrix} = \boldsymbol{P}
$$

[1]) Combescure, sur quelques systèmes particuliers d'équations différentielles. Crelle's J. Bd. 80, p. 33—51.

$$\frac{d\mu}{dt} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a'' & b'' & c'' \\ p & q & r \end{vmatrix} = \boldsymbol{M}$$

Von denselben ist $\boldsymbol{P}$ bereits von a'', b'', c'' frei, $\boldsymbol{N}$ wird es durch Quadriren und $\boldsymbol{M}$ durch Einführung der durch die Gleichungen (5) dargestellten Werthe unter Beachtung der folgenden Identitäten

$$\Sigma \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ Ap & Bq \end{vmatrix}^2 = \nu - \varrho^2$$

$$(8) \qquad \Sigma \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ p & q \end{vmatrix}^2 = \tau - \sigma^2$$

$$\Sigma \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ Ap & Bp \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ p & q \end{vmatrix} = \mu_1 - \varrho\sigma$$

Die Gleichungen (7) nehmen dann die folgende Form an:

$$\left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2 = 4P^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \mu \\ \lambda & \nu & \varrho \\ \mu & \varrho & 1 \end{vmatrix} = 4P^2 \cdot N$$

$$(9) \qquad \left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 = \begin{vmatrix} 1 & \varrho & \sigma \\ \varrho & \nu & \mu_1 \\ \sigma & \mu_1 & \tau \end{vmatrix} = R$$

$$(\nu - \varrho^2) \cdot \frac{d\mu}{dt} = \frac{\mu_1 - \varrho\sigma}{2P} \cdot \frac{d\nu}{dt} + (\lambda - \mu\varrho) \cdot \frac{d\varrho}{dt}$$

Dieselben enthalten als abhängige Variable einmal die 3 Grössen ν, ϱ, μ, sodann noch σ und τ . σ und τ lassen sich aber vermöge der 5 Gleichungen (4) durch ν, ϱ, μ darstellen (vorläufig wenigstens implicite), so dass also in der That nur drei abhängige Veränderliche in das vorstehende System eingehen.

§ 5.

Vierte Form.

Die Differentialgleichungen (9) enthalten die durch (3) und (4) definirten 6 Grössen λ, μ, ν, ϱ, σ, τ, welche auf einer der 4 folgenden Axen gedeutet werden können:

auf der Axe ON des Momentankräftepaars [Ap, Bq, Cr];
„ „ „ OT der instantanen Drehung [p, q, r];
„ „ „ OZ der Schwere, [a'', b'', c''];
„ „ „ OS der Figur, [α, β, γ];

Trägt man auf den beiden ersteren Axen vom Unterstützungspunkt O aus die Grössen

$$\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2} = \sqrt{\nu} = \text{ON des Kräftepaars und}$$

$$\sqrt{p^2 + q^2 + r^2} = \sqrt{\tau} = \text{OT der Drehung}$$

wirklich auf, so können durch Division mit $\sqrt{\nu}$ bezw. $\sqrt{\tau}$ die 3 Determinanten (7) so umgeschrieben werden, dass dieselben ausschliesslich Winkelcosinus bezüglich der Hauptaxen X', Y', Z' enthalten und, quadrirt, die Cosinus der Winkel zwischen den 4 Axen N, T, Z, S.

$$\frac{d\nu}{dt} = 2P\sqrt{\nu} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \cos SZ & \cos SN \\ \cos SZ & 1 & \cos ZN \\ \cos SN & \cos ZN & 1 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d\varrho}{dt} = \sqrt{\nu\tau} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \cos SN & \cos ST \\ \cos SN & 1 & \cos NT \\ \cos ST & \cos NT & 1 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d\mu}{dt} = \sqrt{\nu} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \cos SZ & \cos ST \\ \cos SZ & 1 & \cos ZT \\ \cos ST & \cos ZT & 1 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

Die Formen dieser Determinanten bedingen aber bekanntlich die sechsfachen Kubikinhalte von Pyramiden: man trage nur, wie auf den Axen N und T die Werthe $\sqrt{\nu}$ und $\sqrt{\tau}$, so auf den Axen S und Z je die Längeneinheit

von O aus auf und behalte für die Endpunkte die Bezeichnungen S und Z bei, so wird

$$\frac{1}{2P} \cdot \frac{d\nu}{dt} = \text{6fache Pyramide OZNS}$$

$$\frac{d\varrho}{dt} = \text{6fache Pyramide ONST}$$

$$\frac{d\mu}{dt} = \text{6fache Pyramide OSTZ.}$$

Andererseits führen die Entwickelungen obiger Determinanten auf die Formeln

$$\frac{d\nu}{dt} = 2P\sqrt{\nu} \cdot \begin{Bmatrix} \sin ZN \,.\, \sin NS \,.\, \sin \widehat{ZNS} \\ \sin NS \,.\, \sin SZ \,.\, \sin \widehat{NSZ} \\ \sin SZ \,.\, \sin ZN \,.\, \sin \widehat{SZN} \end{Bmatrix}$$

$$\frac{d\varrho}{dt} = \sqrt{\nu}\sqrt{\tau} \cdot \begin{Bmatrix} \sin NS \,.\, \sin ST \,.\, \sin \widehat{NST} \\ \sin ST \,.\, \sin TN \,.\, \sin \widehat{STN} \\ \sin TN \,.\, \sin NS \,.\, \sin \widehat{TNS} \end{Bmatrix}$$

$$\frac{d\mu}{dt} = \sqrt{\tau} \cdot \begin{Bmatrix} \sin ST \,.\, \sin TZ \,.\, \sin \widehat{STZ} \\ \sin TZ \,.\, \sin ZS \,.\, \sin \widehat{TZS} \\ \sin ZS \,.\, \sin ST \,.\, \sin \widehat{ZST} \end{Bmatrix},$$

wobei jedesmal eines der drei gleichwerthigen Produkte zu nehmen ist.

§ 6.

Geometrische Folgerungen.

Die Gleichungen des vorstehenden Paragraphen sagen Folgendes aus:

Trägt man vom festen Punkte O des rotirenden Körpers aus auf den vier Axen des Kräftepaars N, der Drehung T, der Schwere Z und der Figur S beziehungsweise auf die Grösse des wirkenden Paares $\sqrt{\nu}$, der Drehgeschwin-

digkeit $\sqrt{\tau}$ und je die Längeneinheit, so wird dem Wachsthum der Grössen ν, ϱ, μ je ein bestimmter Rayon zugewiesen: der Grösse ν des Quadrates des Kräftepaars die Pyramide OZNS;
der Grösse ϱ des um die Figuraxe thätigen Antheils dieses Paares die Pyramide ONST;
der Grösse μ_1 ($= 2P\mu + h$) der lebendigen Kraft die Pyramide OSTZ,
und zwar sind die Zunahmen dieser Grössen bis auf Constante dem Kubikinhalte der jeweiligen Pyramide effectiv gleich.

Diese Zunahmen sind um so grösser, je grösser der Inhalt der Pyramiden ist, je näher also im allgemeinen die Kanten- und Flächenwinkel der von O auslaufenden vier charakteristischen Axen einem rechten Winkel kommen.

Es zeigt sich ferner unmittelbar:

Soll von den Grössen 1) $\sqrt{\nu}$ des Kräftepaars, 2) ϱ einer Projection auf die Figuraxe, und 3) μ des Winkelcosinus zwischen der letzteren und der Verticalen [oder μ_1 der lebendigen Kraft] eine ein Maximum oder Minimum werden, so muss entweder eines der drei Axentripel 1) der Verticalen, des Kräftepaares, der Figur; 2) des Kräftepaares, der Figur, der Drehung; und 3) der Figur, der Drehung, der Verticalen je in eine Ebene fallen — oder es müssen zwei Axen eines Tripels zusammenliegen.

Dieser Satz dürfte im allgemeinen auch umkehrbar sein. Das Zusammenliegen der Axe der Figur mit einer der drei anderen Axen würde dann für zwei der Werthe ν, ϱ, μ extreme Werthe nach sich ziehen.

§ 7.

Specielle Wahl der Constanten, welche auf Integrale führt.

Das allgemeinste Problem der Rotation eines dem Einflusse der Schwere unterliegenden Körpers mit festem Punkte schliesst in sich in Bezug auf die Beschaffenheit des Körpers 6 und in Bezug auf seine Anfangslage 1 Constante: A, B, C, P, α, β, (γ) und λ. Durch besondere Annahme der 6 ersteren lassen sich sofort Integrale der Gleichungen (9) ersehen, und zwar zunächst in den bisher fast ausnahmslos behandelten Fällen:

I. A = B = C.

Es wird $\frac{d\varrho}{dt} = 0, \varrho = \varrho_0; \frac{d\nu}{d\mu} = 2AP, \nu = A(2P\mu + h); \sigma = \frac{\varrho_0}{\varrho}$.

D. h.

Im Falle der Gleichheit der 3 Hauptträgheitsmomente werden die Projectionen des Kräftepaares und der Drehung bezüglich der Figuraxe constant, die lebendige Kraft der Drehung dem Quadrate des Kräftepaares proportional[1]).

II. P = 0.

Dies kann dadurch erreicht werden, dass entweder das Gewicht des Körpers oder aber die Entfernung des Schwerpunktes vom Unterstützungspunkte gleich Null genommen wird. In beiden Fällen folgt

$$d\nu = 0, \ \nu = \nu_0; \ d\mu = 0 \ \mu_1 = \mu_{1(0)}$$

d. h. Es besitzt für beide Fälle sowohl das anregende Momentankräftepaar als auch die lebendige Kraft eine constante Grösse.

---

[1]) Nach der Theorie der Trägheitsmomente ist die Annahme dreier gleicher Hauptträgheitsmomente im Punkte O identisch mit der Forderung, dass alle Axen durch O Hauptaxen seien. Sohin ist auch die Figuraxe eine solche, und das vorliegende Problem I nur eine speciellere Voraussetzung des nachstehenden Falles III der gyroscopischen Bewegung.

Dreht sich freilich der Körper um seinen Schwerpunkt, so ist wegen der Unbestimmtheit der Cosinus α, β, γ die Gleichung für $\frac{d\varrho}{dt}$ nicht zu gebrauchen, so dass man für diesen Fall auf die Euler'schen Bewegungsgleichungen in der früheren Form (1) zurückgreifen muss. Aus dem gleichen Grunde ist für diese specielle Bewegungsart von einer Interpretirung der Gleichung $\mu = \mu_0$, welche im allgemeinen eine Kreiskegelbewegung der Figuraxe um die Verticale bedeutet, abzusehen.

III. $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$, $A = B$.

Für diesen Fall des Gyroscops ergibt die zweite Gleichung (7)

$$\frac{d\varrho}{dt} = 0, \; \varrho = \varrho_0.$$

Weil aber σ sich laut (4) auf $\sigma = \sigma_0 = \varrho_0 : C$ reducirt, kann die dritte Gleichung (9) integrirt werden; sie liefert

$$\nu - \varrho_0{}^2 = \Gamma\left(\mu_1 - \frac{\varrho_0{}^2}{\varrho}\right),$$

worin Γ eine willkürliche Constante bedeutet.

D. h. *Im Falle der Bewegung eines schweren Umdrehungskörpers um einen festen Punkt seiner Symmetrieaxe sind die Componenten des Kräftepaars und der Drehung längs dieser Axe constant, das Quadrat des Paares bis auf eine additive Constante der lebendigen Kraft der Drehung proportional.*

Setzt man in die erste der Gleichungen (9) den Werth von

$$\mu = \frac{\mu_1 - h}{2P},$$

wie er sich auf Grund der obigen Relation in ν darstellt ein, so ergibt sich die Zeit t als elliptisches Integral

erster Gattung der Grösse ν, ν selbst als elliptische Funktion von t,

$$\nu = F(t).$$

Da mit ν auch μ_1 bekannt, ϱ aber constant ist, erscheint somit das Problem gelöst.

Die Art und Weise seiner Lösung dürfte dabei die denkbar einfachste sein, insoferne sie die Winkelgeschwindigkeiten p, q der Drehung um die zwei Hauptaxen X', Y' des Äquators — deren Aufstellung gewisse Schwierigkeiten im Gefolge haben kann [1]) — einfach darstellt als die Lösungen der beiden quadratischen Gleichungen

$$\nu = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r_0^2 = F(t)$$

$$(\nu - \varrho_0^2) - \Gamma\left(\mu_1 - \frac{\varrho_0^2}{c}\right) = A(A - \Gamma)p^2 + B(B - \Gamma)q^2 = 0.$$

§ 10.

Specielle Wahl der Constanten, welche Vereinfachung erzielt.

Zu den drei Differentialgleichungen (9), welche als abhängige Veränderliche die Grössen ν, ϱ, μ enthalten, treten bekanntlich noch zwei Bestimmungsgleichungen, welche als Eliminationsresultate der Gleichungen (4) σ und τ als Funktionen von ν, ϱ, μ bestimmen.

Diese Gleichungen sind für den allgemeinsten Fall des Rotationsproblems ziemlich complicirt, wir wollen jedoch nicht unterlassen, wenigstens die eine derselben explicite hier aufzustellen, um uns später auf solche berufen zu können [2]).

[1]) Vgl. das in meiner citirten Abhandlung, math. Ann. XXIX, über Söderblom Gesagte. (Söderblom. Über die Drehung eines Rotationskörpers um einen festen Punkt. Nova acta soc. Upsaliensis. XII. 1884 1—92).

[2]) Implicite sind die Bedingungsgleichungen sofort zu erhalten. Man suche aus den drei ersten Gleichungen (2) die Werthe von p^2, q^2, r^2 und setze die Quadratwurzeln aus ihnen in die zwei letzten Gleichungen (4) ein:

Der Weg, welchen wir einschlagen, ist der folgende.

Wir bestimmen aus den zwei letzten Gleichungen (4) die Grössen p, q in Funktion der Grössen ϱ, σ und r, bilden p^2 und q^2 und eliminiren aus den zwei so entstandenen Relationen die erste Potenz von r. Dadurch erhalten wir

$$\alpha^2 (B - A)(C - A)(\varrho - A\sigma) p^2 + \beta^2 (A - B)(C - B)(\varrho - B\sigma) q^2 + \gamma^2 (A - C)(B - C)(\varrho - C\sigma) r^2 = (\varrho - A\sigma)(\varrho - B\sigma)(\varrho - C\sigma),$$

eine Gleichung, welche im Vereine mit den drei ersten Gleichungen (4) die drei Quadrate p^2, q^2, r^2 zu entfernen gestattet und so zur Relation Veranlassung gibt

$$\sigma(\tau - \sigma^2) \,.\, ABC - \sigma(\mu_1 - \varrho\sigma) \,.\, \Sigma AB - (\tau\varrho - \mu_1\sigma) \,.\, \Sigma AB\gamma^2 + \varrho(\mu_1 - \varrho\sigma) \,.\, \Sigma A + (\nu\sigma - \mu_1\varrho) \,.\, \Sigma A\alpha^2 - \varrho(\nu - \varrho^2) = 0.$$

In derselben ist die Symmetrie bezüglich der Constanten A, B, C und α, β, γ, wie es sein muss, vollständig gewahrt.

Die vorstehende Gleichung sowohl als die zweite, hier nicht angeschriebene, Beziehung zwischen den Werthen σ, τ einerseits und ν, ϱ, μ andererseits vereinfachen sich nun erheblich, sobald von den Constanten des Problems welche speciell gewählt werden, und zwar in dem Masse, als sich eben die Ausgangsgleichungen (4) vereinfachen.

Wir verzeichnen insbesondere die nachstehenden Annahmen.

I. Zwei Hauptträgheitsmomente sind einander gleich, A = B.

$$AC\tau = (A + C)\mu_1 - \nu$$

$$(A\sigma - \varrho)^2 = \gamma^2 \frac{A - C}{C} (A\mu_1 - \nu)$$

$$A\alpha \sqrt{\frac{\nu - (B + C)\mu_1 + BC\tau}{(A - B)(A - C)}} + B\beta \sqrt{\frac{\nu - (C + A)\mu_1 + CA\tau}{(B - C)(B - A)}} + C\gamma \sqrt{\frac{\nu - (A + B)\mu_1 + AB\tau}{(C - A)(C - B)}} = \varrho$$

$$\alpha \sqrt{\frac{\nu - (B + C)\mu_1 + BC\tau}{(A - B)(A - C)}} + \beta \sqrt{\frac{\nu - (C + A)\mu_1 + CA\tau}{(B - C)(B - A)}} + \gamma \sqrt{\frac{\nu - (A + B)\mu_1 + AB\tau}{(C - A)(C - B)}} = \sigma.$$

II. Der Schwerpunkt liegt in einer Hauptebene, $\gamma = 0$.

$$(\nu - C\mu_1)(A - B)^2 \alpha^2 \beta^2 = A (A - C) \beta^2 (\varrho - B\sigma)^2 + B (B - C) \alpha^2 (\varrho - A\sigma)^2$$

$$(\mu_1 - C\tau)(A - B)^2 \alpha^2 \beta^2 = (A - C) \beta^2 (\varrho - B\sigma)^2 + (B - C) \alpha^2 (\varrho - A\sigma)^2.$$

III. Der Schwerpunkt liegt in einer Hauptebene und es ist das Trägheitsmoment um eine der Hauptaxen dieser Ebene gleich dem Trägheitsmoment um die dritte Hauptaxe, $\gamma = 0$; $B = C$.

$$AB\tau = (A + B)\mu_1 - \nu$$

$$(B\sigma - \varrho)^2 = \alpha^2 \frac{A - B}{A} (\nu - B\mu_1)$$

IV. Der Schwerpunkt liegt auf einer Hauptaxe, $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$.

$$C\sigma = \varrho$$

$$AB\tau = (A + B)\mu_1 - \nu + (A - C)(B - C)\sigma^2.$$

V. Der Schwerpunkt liegt auf einer Hauptaxe und die Trägheitsmomente um die letztere, sowie um eine der zwei andern Hauptaxen sind einander gleich, $\alpha = \beta = 0$; $B = C$.

$$B\sigma = \varrho$$

$$AB\tau = (A + B)\mu_1 - \nu.$$

VI. Der Schwerpunkt liegt in einer Hauptebene mit zwei gleichen Hauptaxen, $\gamma = 0$: $A = B$.

$$B\sigma = \varrho$$

$$AB\tau = (A + B)\mu_1 - \nu\ ^{1)}.$$

VII. Die Axe des angreifenden Kräftepaars ist horizontal gelegen, $\lambda = 0$.

[1]) Die Fälle V und VI sind nach der Theorie der Trägheitsmomente in der That identische.

Diese Annahme vereinfacht nicht sowohl die Eliminationsgleichungen für σ und τ, als vielmehr die Differentialgleichungen (9).

Untersuchung auf singuläre Lösungen.

§ 9.

Erste Bedingnisse der Singularität.

Indem wir die Möglichkeit singulärer Lösungen der Differentialgleichungen (9) untersuchen, folgen wir einer Abhandlung von Herrn A. Mayer[1]), welche sich zum Ziele gesetzt hat, die Criterien für die Singularität der Lösungen eines Systems gewöhnlicher simultaner Differentialgleichungen aufzustellen.

Wir schreiben die Gleichungen (9) in der Form

$$F_1 \equiv \left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2 - 4P^2 N = 0$$

$$(10) \quad F_2 \equiv \left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 - R = 0$$

$$F_3 \equiv (\nu - \varrho^2) \cdot \frac{d\mu}{dt} - \frac{\mu_1 - \varrho\sigma}{2P} \cdot \frac{d\nu}{dt} - (\lambda - \mu\varrho) \cdot \frac{d\varrho}{dt} = 0.$$

Dieselben enthalten die drei Grössen ν, ϱ, μ, in denen sich ja auch σ und τ ausdrücken, als abhängige, die Zeit t als die unabhängige Veränderliche.

Es werde $\frac{d\nu}{dt} = \nu'$, $\frac{d\varrho}{dt} = \varrho'$, $\frac{d\mu}{dt} = \mu'$ gesetzt.

Die erste Bedingung für die Möglichkeit singulärer Lösungen ist nun die, dass die Gleichungen (10) die zweiten Differentialquotienten

$\frac{d\nu'}{dt} = \nu''$, $\frac{d\varrho'}{dt} = \varrho''$, $\frac{d\mu'}{dt} = \mu''$ nicht mehr

---

[1]) A. Mayer. Über die Ableitung der singulären Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen aus den Differentialgleichungen selbst. Math. Annalen, XXII, 368—392. (Im Folgenden mit A. M. bezeichnet.)

völlig bestimmen dürfen, sobald man die den singulären Lösungen entlehnten Werthe von ν, ϱ, μ, ν', ϱ', μ', nach (10) substituirt hat. Diese Bedingung gipfelt in dem Nullwerden [1]) der Determinante (mit partiellen Differentialquotienten)

$$(11)\ \Delta = \begin{vmatrix} \frac{dF_1}{d\nu'} & \frac{dF_1}{d\varrho'} & \frac{dF_1}{d\mu'} \\ \frac{dF_2}{d\nu'} & \frac{dF_2}{d\varrho'} & \frac{dF_2}{d\mu'} \\ \frac{dF_3}{d\nu'} & \frac{dF_3}{d\varrho'} & \frac{dF_3}{d\mu'} \end{vmatrix},$$

hier also von

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2\frac{d\nu}{dt} & 0 & 0 \\ 0 & 2\frac{d\varrho}{dt} & 0 \\ -\frac{\mu_1 - \varrho\sigma}{2P} & -(\lambda - \mu\varrho) & (\nu - \varrho^2) \end{vmatrix}$$

Letztere Determinante hat aber den Werth

$$\Delta = 4 \cdot \frac{d\nu}{dt} \cdot \frac{d\varrho}{dt} \cdot (\nu - \varrho^2),$$

sie wird also Null für

I. $\frac{d\nu}{dt} = 0$; $\nu = \nu_0$ — eine Annahme, welche zufolge des § 5 nach sich zöge $\widehat{ZNS} = 0$;

II. $\frac{d\varrho}{dt} = 0$; $\varrho = \varrho_0$ — was im Gefolge hätte $\widehat{NST} = 0$;

III. $\nu - \varrho^2 = 0$; — was wie gezeigt werden wird, auf $N \equiv S$ und $\frac{d\nu}{dt} = 0$, $\frac{d\varrho}{dt} = 0$, hinausläuft, mit letzteren Annahmen jedoch nicht reciprok ist;

IV. für das gleichzeitige Eintreffen je zweier oder aller drei Bedingungen.

---

[1]) A. M. 371.

Sehen wir von der letzteren Eventualität, die ja unter den drei ersteren bereits enthalten ist, ab, so können wir also folgenden allgemeinen Satz verzeichnen:

Es gibt für das Problem der Rotation eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt im günstigsten Falle drei, und nicht mehr als drei Möglichkeiten von singulären Lösungen:

I. Die Annahme, es möge während der ganzen Dauer der Bewegung die Grösse des momentan anregenden Kräftepaars ($\sqrt{r}$) constant bleiben — oder, was damit identisch und reciprok ist, es mögen die Axe der Figur und des Kräftepaars mit der Axe der Schwere stets in einer Ebene liegen.

II. Die Annahme, es möge während der ganzen Dauer der Bewegung die Componente des Momentankräftepaars bezüglich der Figuraxe (ϱ) constant bleiben — oder, was damit identisch und reciprok ist, es mögen die Axen der Figur, des Kräftepaars und der Drehung stets in einer Ebene bleiben.

III. Die Annahme, es mögen die Kräftepaaraxe und die Figuraxe ständig coincidiren.

Berücksichtigen wir, dass die Componente λ des wirkenden Kräftepaars um die Verticale schon a priori als constant gefunden wurde, so können wir auch sagen:

Im Falle I wäre der von der Kräftepaaraxe im Raume beschriebene Kegel ein Kreiskegel um die Richtung der Verticalen. Im Falle II besässe der von denselben Axen im beweglichen System des Körpers definirte Kegel eine ebene, senkrecht der Figuraxe gelegene Basis, deren Ebene in die durch die Constante λ bestimmte feste Horizontalebene eine Auf-

einanderfolge von geraden Linien einzeichnen würde, deren Enveloppe die Basis des räumlichen Kegels der Kräftepaaraxen ergäbe. Im Falle III endlich würde der im Körper construirte Kegel der Kräftepaaraxen auf die Figuraxe zusammenschrumpfen, welche dann ihrerseits den räumlichen Kegel jener Axen durchliefe.

Wir haben nun im Folgenden zu untersuchen, ob die drei zu Tage getretenen Annahmen die Gleichungen (10) wirklich integriren, und wenn, ob sie die sonstigen Bedingungen der Singularität befriedigen.

Freilich darf aus dem effektiven Eintritte dieser Thatsachen nicht mit Sicherheit gefolgert werden, dass die Lösungen wirklich singuläre seien: diese, wie H. Mayer bemerkt[1]), „schwierigste" aller Fragen beantwortet sich fürs Erste immer nur auf Grund der Kenntniss der allgemeinen Lösungen des Rotationsproblems, welche allein es möglich macht, zu entscheiden, ob unsere Gleichungen durch constante oder von r, ϱ, μ abhängige Werthe der drei willkürlichen Constanten der allgemeinen Integralgleichungen aus diesen sich ableiten lassen.

Soviel steht indessen fest, dass andere Möglichkeiten als solche, welche auf dem Verschwinden der obigen Determinante Δ fussen, entschieden nicht singulärer Natur sind.

§ 10.

Weitere Criterien.

Die Existenz der Gleichung $\Delta = 0$ ist die erste Bedingung für das Auftreten singulärer Lösungen.

Weitere Bedingungen liegen in den nachfolgenden Sätzen ausgesprochen:

Damit die Gleichung $\Delta = 0$, zusammen mit den Gleichungen (10) ein Werthsystem liefert, darf dieselbe nicht eine

[1]) A. M. 375.

blose algebraische Folge letzterer Gleichungen sein. Das ist in der That für unsere drei Fälle ausgeschlossen.

Damit die Gleichungen (10) die zweiten Derivirten ν'', ϱ'', μ'' weder völlig bestimmen, noch auch unendlich werden lassen, müssen ferner auch jene Determinanten verschwinden, welche für diese Unbekannten als Zähler erhalten werden. Dieselben können vermöge der Gleichungen (10) oder (10) im Vereine mit $\Delta = 0$ entweder an sich schon Null sein oder aber höchstens zu einer einzigen, von $\Delta = 0$ unabhängigen Relation Veranlassung geben [1]).

Differenziren wir die Gleichungen (10) nach t und bezeichnen wir die Differentialquotienten durch Accente, so erhalten wir

$$2\nu'\nu'' - 4P^2 N' = 0$$
$$2\varrho'\varrho'' \quad - R' = 0$$
$$(\nu - \varrho^2)\mu'' - \frac{\mu_1 - \varrho\sigma}{2P}\nu'' - (\lambda - \mu\varrho)\varrho'' - Q = 0,$$

wobei

$$Q = \varrho'(\mu'\varrho - \mu\varrho') - \frac{\nu'(\varrho\sigma)'}{2P}$$

gesetzt ist.

Hieraus wird

$$\Delta \, . \, \nu'' = \begin{vmatrix} 4P^2 N' & 0 & 0 \\ R' & 2\varrho' & 0 \\ Q & -(\lambda - \mu\varrho) & (\nu - \varrho^2) \end{vmatrix} = \Delta_\nu$$

$$\Delta \, . \, \varrho'' = \begin{vmatrix} 2\nu' & 4P^2 N' & 0 \\ 0 & R' & 0 \\ -\frac{\mu_1 - \varrho\sigma}{2P} & Q & (\nu - \varrho^2) \end{vmatrix} = \Delta_\varrho$$

$$\Delta \, . \, \mu'' = \begin{vmatrix} 2\nu' & 0 & 4P^2 N' \\ 0 & 2\varrho' & R' \\ -\frac{\mu_1 - \varrho\sigma}{2P} & -(\lambda - \mu\varrho) & Q \end{vmatrix} = \Delta_\mu$$

---

[1]) A. M. 371—374.

Diese drei Determinanten verschwinden zunächst für den Fall $\nu - \varrho^2 = 0$, welcher, wie gezeigt werden wird, $\nu' = 0$, $\varrho' = 0$ nach sich zieht.

Für $\nu' = 0$ wird $\varDelta_\varrho = 0$, $\varDelta_\nu = 8P^2 N'\varrho' (\nu - \varrho^2)$,

$$\varDelta_\mu = 4PN' \varrho' (\mu_1 - \varrho\sigma);$$

Für $\varrho' = 0$ $\quad \varDelta_\nu = 0$, $\varDelta_\varrho = R' \nu' (\nu - \varrho^2)$,

$$\varDelta_\mu = 2R' \nu' (\mu_1 - \varrho\sigma).$$

Nun führen aber nach (9) die Bestimmungen $\nu' = 0$ auf $N = 0$, $\varrho' = 0$ auf $R = 0$, und es ist selbstverständlich, dass, falls diese Gleichungen wirklich als bestehend angenommen werden, während des ganzen Verlaufes der Drehung, die Derivirten zugleich mit denselben verschwinden müssen, wie ebenso umgekehrt das Verschwinden von N' und R' die erste Bedingung ist für die Existenz von eventuellen Integralgleichungen $N = 0$, $R = 0$.

In wie weit freilich die letzteren Gleichungen Integralgleichungen sind oder unter gewissen Annahmen auf solche führen, soll in den folgenden Abschnitten dargethan werden.

Der Fall $\nu' = 0$.

§ 11.

Wird für die ganze Dauer der Bewegung

$$\frac{d\nu}{dt} = \nu' = 0, \; \nu = \text{const.} = \nu_0$$

angenommen, so reducirt sich die dritte der Differentialgleichungen (9) auf die in μ lineare Differentialgleichung

$$(\nu_0 - \varrho^2)\, d\mu - (\lambda - \mu\varrho)\, d\varrho = 0.$$

Integrirt liefert die letztere

$$\mu\nu_0 - \lambda\varrho = D \sqrt{\nu_0 - \varrho^2},$$

und durch besondere Wahl der willkürlichen Constanten

$$D = \sqrt{\nu_0 - \lambda^2}$$

$$(\mu\nu_0 - \lambda\varrho)^2 - (\nu_0 - \varrho^2)(\nu_0 - \lambda^2) = 0,$$

eine Gleichung, welche identisch ist mit

(11) $N = (\nu_0 - \varrho^2)(1 - \mu^2) - (\lambda - \mu\varrho)^2 = 0.$

Nach vorstehendem Raisonnement erscheint es für den ersten Blick zweifellos, dass für den besonderen Fall $\nu = \nu_0$ $N = 0$ wirklich eine Integralgleichung des Systems (9) der Differentialgleichungen der Bewegung sei. Es wurden daher bereits in einer früheren Note [1]), — welche auf einem minder einfachen Wege, als ihn die Einführung der Grössen λ, μ, ν, ϱ, gestattet, zu denselben Gleichungen $\nu' = 0$, $N = 0$ gelangt war — folgende Consequenzen gezogen:

Das Problem der Rotation ist lösbar für den Fall der Unveränderlichkeit der Grösse des anregenden Momentankräftepaares oder für die damit völlig gleichbedeutende Bedingung des steten Zusammenliegens der Kräftepaar- und der Figuraxe in einer (beweglichen) Vertikalebene. Die Lösung führt im allgemeinsten Falle auf Abel'sche, für specielle Voraussetzungen auf hyperelliptische und elliptische Integrale.

Diese Schlussweise ist jedoch nicht richtig:

Es verschwindet freilich durch die Annahme $\nu' = 0$, $N = 0$ die erste der Differentialgleichungen (9) identisch, aber in der linken Seite quadratisch, in der rechten linear. Nachdem faktisch

$$\nu' = 2P\sqrt{N}$$

ist, gehört offenbar zu der Voraussetzung

$$\nu' = 0$$

die Folgerung

$$\sqrt{N} = 0,$$

und was also zunächst zu untersuchen ist, ist dies, ob die derivirte Gleichung

$$(\sqrt{N})' = 0$$

eine blose algebraische Folge der Gleichungen $\nu' = 0$, $\sqrt{N} = 0$ und der übrigen Gleichungen (9) sei.

Man erinnere sich, um das Irrige der Schlussreise wei-

[1]) Über das Problem der Rotation. Math. Ann. XX, p. 461—470.

ter darzuthun, dass die Determinante N des Gleichungssystems (9) durch Quadriren der Determinante $\boldsymbol{N}$ der Gleichungen (7) entstanden war; es wäre also

$$\nu' = 0,\ \mathrm{N} = 0$$

gleichbedeutend mit

$$\nu' = 0,\ \boldsymbol{N}^2 = 0,$$

also weiterhin

$$\boldsymbol{N}' = 0 \text{ mit } 2\boldsymbol{N}\boldsymbol{N}' = 0.$$

Natürlich verschwindet nun mit der Annahme N oder $\boldsymbol{N}^2 = 0$, welche ja $\boldsymbol{N} = 0$ im Gefolge hat, das letztere Produkt evident, weil es eben den Faktor $\boldsymbol{N}$ besitzt; darum kann also umgekehrt aus dem Verschwinden von N' absolut nichts gefolgert werden, es muss vielmehr festgehalten werden, dass, wenn für die ganze Zeitdauer der Bewegung

$$\nu' = 0 \text{ und } \mathrm{N} = 0 \text{ und hiemit } \boldsymbol{N} = 0$$

Geltung besitzen sollen, entschieden auch während dieser Dauer

$$\boldsymbol{N}' = 0$$

bleiben muss. Anders gesprochen: ist N = 0 ein Integral der Bewegungsgleichungen (9), so braucht desswegen nicht nothwendig auch $\boldsymbol{N} = 0$ — worauf es in erster Linie ankäme — ein solches der Gleichungen (7) zu sein, wogegen allerdings umgekehrt $\boldsymbol{N} = 0$ auch N = 0 zu einem solchen berechtigen würde. Wäre jedoch N = 0 kein Integral, so wäre $\boldsymbol{N} = 0$ erst recht kein solcher.

Differenziren wir nun die Determinante (7)

$$\boldsymbol{N} = \begin{vmatrix} a'' & b'' & c'' \\ Ap & Bq & Cr \\ p & q & r \end{vmatrix},$$

so erhalten wir

$$\boldsymbol{N}' = \Sigma \frac{da''}{dt} \begin{vmatrix} Bq & Cr \\ & \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} - \Sigma \frac{dAp}{dt} \begin{vmatrix} b'' & c'' \\ & \\ \beta & \gamma \end{vmatrix},$$

und durch Einsetzen der Werthe der Differentialquotienten aus den 6 zusammengehörigen Differentialgleichungen (1) und (2)

$$N' = \Sigma \begin{vmatrix} b'' & c'' \\ q & r \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} Bq & Cr \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} - \Sigma \begin{vmatrix} Bq & Cr \\ q & r \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} b'' & c'' \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} + P . \Sigma \begin{vmatrix} b'' & c'' \\ \beta & \gamma \end{vmatrix}^2$$

Um bei der Multiplikation der Determinanten nicht die Combination

$$a'' p + b'' q + c'' r$$

zu erhalten, welche erst aus den Gleichungen (5) abzuleiten wäre, beachten wir, dass im Falle $N = 0$ sich setzen lässt

$$\begin{vmatrix} b'' & c'' \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} = K . \begin{vmatrix} Bq & Cr \\ \beta & \gamma \end{vmatrix},$$

und analog für die zwei andern Determinanten nach cyclischer Vertauschung. Darin bedeutet K einen Proportionalitätsfaktor, welcher durch Multiplikation der drei so entstandenen Gleichungen mit der jeweiligen rechtsseitigen Determinante und Addition unter Bezugnahme auf die Relationen (8) sich darstellt als

$$K = \frac{\lambda - \mu\varrho}{\nu - \varrho^2}.$$

Es wird also zunächst

$$N' = \Sigma \begin{vmatrix} b'' & c'' \\ q & r \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} Bq & Cr \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} - K . \Sigma \begin{vmatrix} Bq & Cr \\ q & r \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} Bq & Cr \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} + P . \Sigma \begin{vmatrix} b'' & c'' \\ \beta & \gamma \end{vmatrix}^2,$$

und durch Auswerthung der Determinantenprodukte unter Beachtung der Festsetzungen (3), (4)

$$N' = (\lambda\sigma - \mu\mu_1) - \frac{\lambda - \mu\varrho}{\nu - \varrho^2} (\nu\sigma - \mu_1 \varrho) + P (1 - \mu^2) .$$

Hieraus folgt

$$(\nu - \varrho^2) N' = (\mu_1 - \varrho\sigma) (\lambda\varrho - \mu\nu) + P (1 - \mu^2) (\nu - \varrho^2) .$$

Soll also

$$N' = 0$$

sein, so muss, wenn nicht gleichzeitig $\nu - \varrho^2$ verschwindet, die Relation statt haben

(12) $(\mu_1 - \varrho\sigma)(\lambda\varrho - \mu\nu) + \mathrm{P}(1 - \mu^2)(\nu - \varrho^2) = 0.$

Nun hat aber das Verschwinden der Determinante $\boldsymbol{N}$ oder N zur Gleichung (11) Veranlassung gegeben:

$$(\lambda - \mu\varrho)^2 - (1 - \mu^2)(\nu - \varrho^2) = 0,$$

und es ist vorgeschrieben, dass für den Fall, dass $\boldsymbol{N} = 0$ eine Integralgleichung des Systems (7) oder (9) sei, $\boldsymbol{N}' = 0$ sich als blosse algebraische Folge von $\nu = \nu_0$ und $\boldsymbol{N} = 0$ (und eventuell der übrigen Gleichungen jener Systeme) erweise d. h.:

es muss die Gleichung (12) aus der Gleichung (11) und aus $\nu = \nu_0$ sich algebraisch ableiten lassen.

Die Gleichung (12) enthält, da ja die Grösse σ nach Früherem sich durch ν, ϱ, μ darstellen lässt, wie auch die Gleichung (11) die Variabeln ϱ, μ und die noch ganz willkürliche Constante $\nu = \nu_0$. Es sind also nur zwei Fälle denkbar:

entweder es führt eine algebraische Combination der zwei Gleichungen (11) und (12) auf eine neue Gleichung, die weder ϱ noch μ enthält, sondern ausser Constanten des Problems nur noch die Grösse ν_0, die dann eben durch diese Constanten bestimmbar wäre als jener Werth ν, der fähig wäre, singuläre Lösung zu erzielen;

oder es ergeben sich ϱ und μ aus den zwei Gleichungen (11) und (12) als Constante.

Die Untersuchung zeigt, dass das Letztere der Fall ist. Wir brauchen nemlich nur zu zeigen, dass für eine specielle Bewegungsart ϱ und μ als constant erhalten werden, um daraus zu schliessen, dass auch die allgemeinste Bewegung auf solche Werthe führe. (Der umgekehrte Schluss wäre natürlich nicht zulässig).

Nehmen wir als solchen Specialfall jenen an, für welchen die Figuraxe eine Hauptträgheitsaxe des Körpers ist — $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$ —, so ergibt sich laut § 8

$$\sigma = \frac{\varrho}{C}.$$

Weiter ist, wie bekannt,

$$\mu_1 = 2P\mu + h;$$

setzen wir endlich noch voraus, dass die Axe des zur Bewegung anregenden Momentankräftepaars stets in der Horizontalebene durch den Unterstützungspunkt gelegen sei, so ist

$$\lambda = 0,$$

und es reduciren sich unter diesen Annahmen die Gleichungen (11) und (12) auf die folgenden:

$$(2P\mu - \varrho^2 + Ch)\,\mu\nu - P\,(1 - \mu^2)\,(\nu - \varrho^2) = 0$$

$$\nu\,(1 - \mu^2) - \varrho^2 = 0$$

Der Werth für ϱ^2 aus der unteren Gleichung oben eingesetzt lässt eine in μ biquadratische Gleichung erscheinen. Die Coëfficienten der verschiedenen Potenzen von μ in letzterer können aber unmöglich verschwinden, wenn überhaupt die Idee eines rotirenden Körpers nicht hinfällig werden soll: folglich bleibt nur die Möglichkeit

$$\mu = \mu_0,$$

welche ihrerseits nach sich zieht

$$\varrho = \varrho_0.$$

Damit sind wir aber zu dem Resultate gelangt

$$\nu' = 0,\ \varrho' = 0,\ \mu' = 0,$$

speciell

$$\nu' = 0,\ \varrho' = 0,$$

über dessen Berechtigung im § 18 entschieden wird. Nur soviel kann jetzt schon bemerkt werden:

Die Annahme, es möge während der ganzen Dauer der Bewegung die Grösse des anregenden Momentankräftepaars constant bleiben, oder, was damit identisch und reciprok ist, es möge die Axe dieses Paares im Raume einen Kreiskegel um die Verticalaxe beschreiben, oder, was wiederum damit gleichbedeutend und umkehrbar ist, es mögen die Kräftepaar-

und die Figuraxe ständig in eine Verticalebene fallen, führt nicht auf eine allgemeine Lösung des Rotationsproblems: es folgt vielmehr mit Nothwendigkeit, dass die Projection der Grösse des anregenden Paares auf die Figuraxe während der ganzen Dauer der Bewegung gleichfalls invariabel sei i. e., dass auch die drei Axen der Figur, des instantanen Kräftepaares und der instantanen Drehung für sich stets in derselben Ebene gelegen sein müssen.

Der Fall $\varrho = 0$.

§ 12.

Der allgemeine Fall $\varrho' = 0$, $R = 0$.

Wenn wir der eingangs des vorigen Paragraphen erwähnten Zusammengehörigkeit

$$\nu' = 0 \ (\nu = \nu_0); \ N = 0$$

hier zunächst analog an die Seite stellen die Annahme

$$\varrho' = 0 \ (\varrho = \varrho_0); \ R = 0,$$

so reduciren sich die Euler'schen Bewegungsgleichungen der Form (9) auf die folgenden:

$$\frac{d\nu}{dt} = 2P \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \mu \\ \lambda & \nu & \varrho_0 \\ \mu & \varrho_0 & 1 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

$$(13) \quad R = \begin{vmatrix} 1 & \varrho_0 & \sigma \\ \varrho_0 & \nu & \mu_1 \\ \sigma & \mu_1 & \tau \end{vmatrix} = 0 = (\nu - \varrho_0{}^2)(\tau - \sigma^2) - (\mu_1 - \varrho_0 \sigma)^2$$

$$(\nu - \varrho_0{}^2) \, d\mu_1 = (\mu_1 - \varrho_0 \sigma) \, d\nu.$$

In diesem System sollte sich die dritte Gleichung integriren lassen und durch besondere Wahl der Integrationsconstanten eine Gleichung liefern, welche mit der Gleichung $R = 0$ übereinstimmte. Oder auch umgekehrt, es sollte

jene Differentialgleichung aus $\frac{dR}{dt} = 0$, $R = 0$ und $\varrho' = 0$ sich algebraisch ableiten lassen — gerade so, wie sich aus ihr, aus $R = 0$, $\varrho' = 0$ eben $\frac{dR}{dt} = 0$ als algebraische Folge erweisen lassen müsste.

Desswegen braucht $R = 0$ noch nicht nothwendig eine integrirende Lösung des Rotationsproblems darzustellen: da die Determinante (9) R das Quadrat der Determinante (7) $\boldsymbol{P}$ ist, wird eben, in Analogie mit dem Gedankengange des vorigen Paragraphen, zu erwägen sein, nicht sowohl, ob

$$dR = 2\boldsymbol{P} . d\boldsymbol{P} = 0$$

eine unmittelbare Folge der Gleichungen $R = 0$, $\varrho' = 0$ und der dritten Differentialgleichung (13) sei, sondern vielmehr, ob

$$d\boldsymbol{P} = 0$$

aus dem Verschwinden von $\boldsymbol{P}$, ϱ' und aus eben jener Differentialgleichung gefolgert werden könne. Anders gesprochen: erfüllt $R = 0$ die Criterien einer Integralgleichung der Euler'schen Bewegungsgleichungen (9), so braucht — worauf es in allererster Linie ankäme — $\boldsymbol{P} = 0$ nicht nothwendig eine Lösung der Differentialgleichungen (7) zu sein, wogegen allerdings umgekehrt eine Lösung $\boldsymbol{P} = 0$ unbedingt auch eine solche $R = 0$ nach sich zöge.

Ist freilich $R = 0$ keine Lösung der dynamischen Differentialgleichungen, so ist $\boldsymbol{P} = 0$ noch weniger eine solche.

Darum scheint es, von diesem letzteren Gesichtspunkte aus betrachtet, sehr zweckmässig, zuerst an der Verbindung $\varrho' = 0$, $R = 0$ fest zu halten, um eben unmögliche Fälle schon a priori von dem Probleme wegweisen zu können.

Nun tritt in der Gleichung

$$R = 0 = (\nu - \varrho_0^2)(\tau - \sigma^2) - (\mu_1 - \varrho_0\, \sigma)^2$$

ausser den drei Variabeln ν, μ_1, σ, welche in der dritten

Gleichung (13) vorkommen, noch die Grösse τ auf; τ aber lässt sich durch eben diese Variable sehr leicht bestimmen vermöge der allgemeinen Relation des § 8, die sich schreiben lässt:

$$(\tau - \sigma^2)\,[\varrho_0\,\Sigma AB\gamma^2 - \sigma\,ABC] - (\mu_1 - \varrho_0\,\sigma)\,[\varrho_0\,\Sigma A\,(1 - \alpha^2) - \sigma\,\Sigma AB\,(1 - \gamma^2)] + (\nu - \varrho_0^{\,2})\,[\varrho_0 - \sigma\,\Sigma A\alpha^2] = 0.$$

Setzt man die Differenz $\tau = \sigma^2$ in die obige Gleichung für $R = 0$ ein, so erhält man eine quadratische Gleichung zur Bestimmung des Quotienten.

$$(14) \qquad \frac{\mu_1 - \varrho_0\sigma}{\nu - \varrho_0^{\,2}} = \eta$$

und aus derselben

$$(15) \qquad 2\eta\,[\varrho_0\,\Sigma AB\gamma^2 - \sigma\,ABC] = [\varrho_0\,\Sigma A\,(1 - \alpha^2) - \sigma\,\Sigma AB\,(1 - \gamma^2)] \pm \sqrt{[\varrho_0\,\Sigma A\,(1 - \alpha^2) - \sigma\,\Sigma AB\,(1 - \gamma^2)] - 4\,[\varrho_0\,\Sigma AB\gamma^2 - \sigma\,ABC]\,[\varrho_0 - \sigma\,\Sigma A\alpha^2]}$$

Mit der vorstehenden Transformation der Grösse τ haben wir eine der beiden Eliminationsgleichungen benützt, welche die Abhängigkeit der Werthe ν, ϱ_0, μ_1, σ, τ auf Grund der Relationen (4) darstellen. Es bleibt also noch eine zweite Beziehung übrig, oder vielmehr — da zu dem System (4) der Winkelgeschwindigkeiten p, q, r nun noch die Bedingung (7)

$$P = \gamma\,(A - B)\,pq + \alpha\,(B - C)\,qr + \gamma\,(C - A)\,rp$$

hinzutritt, als blose Folge von $R = P^2 = 0$ — es sind noch zwei solcher Beziehungen zu erfüllen.

Um dieselben darzustellen, bedenken wir, dass in dem System der Gleichungen (4), erweitert zu

$$A^2\,p^2 + B^2\,q^2 + C^2\,r^2 = \nu$$
$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \mu_1$$
$$p^2 + q^2 + r^2 = \tau$$

$$(16)\qquad \begin{aligned} Ap\alpha + Bq\beta + Cr\gamma &= \varrho_0 \\ p\alpha + q\beta + r\gamma &= \sigma \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1, \end{aligned}$$

die Grössen $\begin{cases} \alpha, & \beta, & \gamma \\ Ap, & Bq, & Cr, \\ p, & q, & r \end{cases}$ in den Gleichungen $\begin{cases} 6,4,5 \\ 4,1,2 \\ 5,2,3 \end{cases}$ als Unbekannte aufgefasst, als Determinante der Coëfficienten gerade die Determinante

$$P = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ Ap & Bq & Cr \\ p & q & r \end{vmatrix} = 0$$

bei sich haben. Keine der angeführten 9 Grössen kann aber unendlich werden, es ist also nothwendig, dass auch die Zählerdeterminanten, denen diese Grössen proportional sind, sämmtliche verschwinden.

Es kommen darnach drei Gleichungstripel zum Vorschein, von der Form:

$$\begin{aligned} &1. \begin{vmatrix} Bq & Cr \\ q & r \end{vmatrix} + \varrho_0 . \begin{vmatrix} q & r \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} + \sigma . \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ Bq & Cr \end{vmatrix} = 0 \\ (17)\ &\varrho_0 . \begin{vmatrix} Bq & Cr \\ q & r \end{vmatrix} + \nu . \begin{vmatrix} q & r \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} + \mu_1 . \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ Bq & Cr \end{vmatrix} = 0 \\ &\sigma . \begin{vmatrix} Bq & Cr \\ q & r \end{vmatrix} + \mu_1 . \begin{vmatrix} q & r \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} + \tau . \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ Bq & Cr \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Diese drei Tripel sind aus einem einzigen derselben unter Beachtung der Bedingung $R = 0$ ableitbar: man braucht nur, um sich hievon zu überzeugen, irgend eine Gleichung (17) mit einer ihrer Determinanten zu multipliciren und die zu dieser Gleichung analogen Gleichungen der zwei andern Tripel mit den analogen Determinanten, so kommt durch Addition entweder die Identität $0 = 0$ oder die Bedingung $R = 0$. Aber auch die drei Gleichungen eines Tripels sind nicht von einander unabhängig: man erkennt sofort, dass die zu den drei viergliedrigen Determinanten (17) gehörige Coëfficientendeterminante

$$\begin{vmatrix} 1 & \varrho_0 & \sigma \\ \varrho_0 & \nu & \mu_1 \\ \sigma & \mu_1 & \tau \end{vmatrix}$$

eben nichts anderes als R und somit 0 ist.

Es bleiben sonach von dem System der 9 Gleichungen, die in der Form (17) enthalten sind, überhaupt nur zwei unabhängige Gleichungen übrig: diese reichen aus zur Bestimmung zweier der Grössen p, q, r, und aus $\boldsymbol{P} = 0$ folgt dann die dritte.

Um jedoch dieselben linear zu erhalten, combiniren wir die zwei ersten Gleichungen (17) zu einer einzigen, indem wir die erste Determinante entfernen. Es folgt

$$(\nu - \varrho_0{}^2) \begin{vmatrix} q & r \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} + (\mu_1 - \varrho_0\,\sigma) \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ Bq & Cr \end{vmatrix} = 0$$

und durch Einführung der Grösse (14) η

$$q = \frac{\beta}{\gamma} \cdot r \cdot \frac{1 - C\eta}{1 - B\eta}$$

Analog folgt

$$p = \frac{\alpha}{\gamma} \cdot r \cdot \frac{1 - C\eta}{1 - A\eta},$$

weiterhin also

$$\alpha p + \beta q = \sigma - \gamma r = \frac{r}{\gamma}\,(1 - C\eta) \left[\frac{\alpha^2}{1 - A\eta} + \frac{\beta^2}{1 - Bq}\right]$$

Hieraus lässt sich der Werth von r, durch σ und η d. i. σ, ν, ϱ_0 und μ_1 ausgedrückt, bestimmen, als

$$(18) \qquad r = \gamma\sigma.\ \frac{(1 - A\eta)\ (1 - B\eta)}{\Sigma\gamma^2\ (1 - A\eta)\ 1 - B\eta)}$$

Durch cyclische Vertauschung erhält man ohne Weiteres auch p und q [1]).

p, q, r in die Gleichungen (16) eingesetzt, dürfen nach dem oben Gesagten nur zu zwei Relationen zwischen ν, ϱ_0,

[1]) Hiemit ist denn auch die eventuelle Zwischenfrage erledigt, wie sich wohl im Falle $\boldsymbol{P} = 0$ die Winkelgeschwindigkeiten p, q, r durch die drei Grössen ν, ϱ, μ darstellen möchten.

μ_1 und σ Veranlassung geben, die sich von $R = 0$ unterscheiden.

Dies zu erweisen, eventuell die zwei gedachten Beziehungen aufzustellen, ist Zweck der nachfolgenden Zeilen.

Durch Multiplikation der drei Gleichungen (18) mit γ, α, β successive und nachfolgender Addition ergibt sich zunächst die Identität $\sigma = \sigma$.

Durch analoge Multiplikation mit $C\gamma$, $A\alpha$, $B\beta$ und Addition folgt

$$\varrho_0 \Sigma \gamma^2 (1 - A\eta) (1 - B\eta) = \sigma \Sigma C\gamma^2 - \sigma\eta \Sigma (A + B) C\gamma^2 + \sigma\eta^2 ABC;$$

ordnet man diese Gleichung nach η und bedenkt, dass

$$\Sigma (A + B) C\gamma^2 = \Sigma AB (1 - \gamma^2)$$
$$\Sigma (A + B) \gamma^2 = \Sigma A (1 - \alpha^2)$$

ist, so kommt

$$\eta^2 [\varrho_0 \Sigma AB\gamma^2 - \sigma ABC] - \eta [\varrho_0 \Sigma A (1 - \alpha^2) - \sigma \Sigma AB (1 - \gamma^2)] + [\varrho_0 - \sigma \Sigma A\alpha^2] = 0,$$

eine Gleichung, welche vollständig mit jener übereinstimmt, welcher der Werth (15) von η entsprang.

Die Gleichung für τ des Systems (16) durch Einführung der Werthe von p, q, r aus (10) zu verificiren, ist ferner unnöthig, da die Verification des Werthes von η, wie sie eben erfolgte, jene des Werthes von τ nach sich zieht, nachdem umgekehrt η aus den beiden Relationen für τ, des § 8 und der Gleichung $R = 0$, hervorgegangen.

Es bleiben somit nur noch die zwei ersten Beziehungen (16) bestehen,

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \nu$$
$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \mu_1,$$

Combinirt man dieselben zur Darstellung

$$\eta = \frac{\mu_1 - \varrho_0\sigma}{\nu - \varrho_0^2} = \frac{\Sigma Cr^2 - \varrho_0\sigma}{\Sigma C^2 r^2 - \varrho_0^2},$$

so folgt durch Substitution der Werthe (18) zunächst formell

$$\eta = \frac{\sigma^2 \Sigma C\gamma^2 (1 - A\eta)^2 (1 - B\eta)^2 - \varrho_0\sigma [\Sigma\gamma^2 (1 - A\eta) (1 - B\eta)]^2}{\sigma^2 \Sigma C^2\gamma^2 (1 - A\eta)^2 (1 - B\eta)^2 - \varrho_0^2 [\Sigma\gamma^2 (1 - A\eta) (1 - B\eta)]^2}.$$

Oben aber wurde gefunden

$$\varrho_0 \Sigma \gamma^2 (1-A\eta)(1-B\eta) = \sigma \Sigma C\gamma^2 - \sigma\eta \Sigma (A+B) C\gamma^2 + \sigma\eta^2 ABC,$$

also schreibt sich, wenn Ω den Ausdruck bedeutet

$$\Omega = \Sigma C^2\gamma^2 (1-A\eta)^2 (1-B\eta)^2$$
$$- [\Sigma C\gamma^2 - \eta \Sigma (A+B) C\gamma^2 + \eta^2 ABC]^2,$$
$$\eta\, \Omega = \Sigma C\gamma^2 (1-A\eta)^2 (1-B\eta)^2$$
$$- \Sigma \gamma^2 (1-A\eta)(1-B\eta) \,.\, [\Sigma C\gamma^2 - \eta \Sigma (A+B) C\gamma^2$$
$$+ \eta^2 ABC].$$

Vorstehende Gleichung enthält als einzige Variable die Grösse η; diese müsste sich sonach als Constante bestimmen, falls nicht die Coëfficienten der verschiedenen Potenzen von η alle zu Null werden. Diese Coëfficienten enthalten ausschliesslich die sechs Constante A, B, C, α, β, γ. Wir setzen

$$(19)\quad \begin{array}{llll} \Sigma A = D & \Sigma AB\gamma^2 = H & & \\ \Sigma AB = E & \Sigma A^2\alpha^2 = J\,; & (A-B)(B-C)(C-A) & \\ ABC = F & \Sigma (A^2+B^2) G^2 = K & = \varDelta, & \\ \Sigma A\alpha^2 = G & \Sigma (A^2+B^2) C^2\gamma^2 = L & & \end{array}$$

so wird:

$$\Sigma\gamma^2 (1-A\eta)(-B\eta) = 1 - \eta (D-G) + \eta^2 H$$
$$\Sigma C\gamma^2 (1-A\eta)^2 (1-B\eta)^2 = G - 2\eta (E-H) + \eta^2 (4F+K) - 2\eta^3 F (D-G) + \eta^4 FH$$
$$\Sigma C^2\gamma^2 (1-A\eta)^2 (1-B\eta)^2 = J - 2\eta (EG-F) + \eta^2 (4FG+L) - 2\eta^3 F (E-H) + \eta^4 F^2$$
$$\Sigma C\gamma^2 - \eta \Sigma (A+B) C\gamma^2 + \eta^2 ABC = G - \eta (E-H) + \eta^2 F.$$

Setzt man diese Ausdrücke in den obigen Quotienten von η ein, so fliesst daraus nach einigen einfachen Reduktionen die Beziehung

$$\eta^2 [L + F(D+G) - E(E-H)] + \eta [E(D-G) - DH - F - K]$$
$$+ [J + E - H - DG] = 0.$$

Die Gleichungen (19) ergeben nun:

$$\begin{array}{ll} L = \Sigma A^2 B^2 (1-\gamma^2) & DH = \Sigma (A^2 B^2 \gamma^2 + A^2 C\beta^2) + F \\ EH = \Sigma A^2 B^2 \gamma^2 + F(D-G) & GE = \Sigma (A^2 B\alpha^2 + A^2 C\alpha^2) + F \\ E^2 = \Sigma A^2 B^2 + 2FD & K = \Sigma (A^2 B\beta^2 + A^2 C\gamma^2) \\ \hline L - E^2 + EH = -F(D+G) & DH + K + GE + F = 3F \\ & \quad + \Sigma A^2 (B+C) = DE \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \mathrm{DG} & = \Sigma\ \mathrm{AB}\ (1 - \gamma^2) + \mathrm{J} \\ \mathrm{E} & = \Sigma\ \mathrm{AB} \\ \mathrm{H} & = \Sigma\ \mathrm{AB}\gamma^2 \\ \hline \mathrm{DG} - \mathrm{E} + \mathrm{H} & = \mathrm{J}, \end{array}$$

es verschwinden sonach die drei Coëfficienten der vorstehenden quadratischen Gleichung in η, und es bleibt somit von dem ganzen System der Gleichungen (16) oder (4) nur eine einzige noch bestehen, die erste oder zweite, bezüglich welcher die Werthe (18) von p, q, r einer Prüfung zu unterziehen sind.

Wir wählen als dieselbe die Gleichung für ν, schreiben jedoch sogleich

$$\nu - \varrho_0^2 = \Sigma\ \mathrm{C}^2\mathrm{r}^2 - \varrho_0^2.$$

Die Werthe (18) darein substituirt, ergeben unter Benützung der Abkürzungen (19) und der obigen Gleichung für ϱ

$$(20)\quad \nu - \varrho_0^2 = \sigma^2 . \frac{\eta^2\,[2\mathrm{FG} + \mathrm{L} - (\mathrm{E}-\mathrm{H})^2] + 2\eta\,[\mathrm{F}-\mathrm{GH}] + [\mathrm{J}-\mathrm{G}^2]}{[\eta^2\,\mathrm{H} - \eta\,(\mathrm{D} - \mathrm{G}) + 1]^2}.$$

Somit sind durch das Nebeneinanderbestehen der Gleichungen (15) und (20) die zwei Grössen ν und μ_1 durch die Constante ϱ_0 und die Variable σ allein unzweideutig ausdrückbar, und es ist, falls nur die eine der Gleichungen oder eine Combination derselben die Integralgleichung der dritten Differentialgleichung (13) vorstellt, das ganze System (13) zurückführbar auf die Ausführung einer einzigen Quadratur, auf die Integration der ersten Differentialgleichung (13), in die man als abhängige Variable die Grösse σ allein vermöge der Gleichungen (15) und (20) eingeführt hat.

Kehren wir daher zur dritten Differentialgleichung (13),

$$(\nu - \varrho_0^2)\ \mathrm{d}\mu_1 = (\mu_1 - \varrho_0\ \sigma)\ \mathrm{d}\nu$$

zurück und führen in dieselbe ein (14)

$$\mu_1 - \varrho_0\ \sigma = (\nu - \varrho_0^2)\ \eta,$$

$$\mathrm{d}\mu_1 = \eta \mathrm{d}\nu + [\varrho_0 + (\nu - \varrho_0^2)\ \eta']\ \mathrm{d}\sigma,$$

wobei η' durch Differentiation des Ausdruckes (15) nach σ zu erhalten ist, so folgt

$$(21) \qquad d\sigma\,[\varrho_0 + (\nu - \varrho_0^2)\,\eta'] = 0$$

und hieraus eine der beiden Annahmen

$$(22) \qquad d\sigma = 0,\ \sigma = \sigma_0,$$

$$(23) \qquad \varrho_0 + (\nu - \varrho_0^2)\,\eta' = 0.$$

Die letztere Bedingung gibt nach Einführung des Werthes (20) von $\nu - \varrho_0^2$ und der Werthe von η, η' aus (15) offenbar eine Gleichung mit der einzigen Variabeln σ — sie deckt sich also vollständig mit der Bedingung (22), wenn nicht anders die Coëfficienten in der gedachten Gleichung von σ alle einzeln verschwinden.

Soll dieser letztere Fall eintreten, so müssen vor allem die von σ freien Glieder gleich Null werden; da aber $\nu - \varrho_0^2$ gemäss der Gleichung (20) proportional σ^2 ist, so gibt es in der nach σ geordneten Gleichung (23) überhaupt nur ein einziges von σ freies Glied; man erhält dasselbe, indem man ϱ_0 mit dem zu η' gehörigen Nenner multiplicirt:

$$\varrho_0 \cdot 2\varrho_0^2 \cdot [\Sigma\ AB\gamma^2]^2$$

Soll dieses Glied Null werden, so ist dies nur möglich unter der Annahme

$$\varrho_0 = 0.$$

Dann aber reducirt sich die Gleichung (23) auf

$$\eta' = 0$$

und es müssten also

$$\varrho_0 = 0 \quad \eta' = 0 \quad \eta = \text{const.}$$

neben einander bestehen können.

Dies ist in der That der Fall: denn aus den Quotienten (15) für η verschwindet unter der Voraussetzung $\varrho_0 = 0$ die Variable σ gänzlich.

Fassen wir das in den letzten Zeilen Erwiesene zusammen, so gelangen wir also zu folgendem Schlusse:

Soll für die ganze Zeitdauer der Bewegung des rotirenden schweren starren Körpers der um die Figuraxe wirksame Antheil des momentan anregenden Kräftepaares constant sein, oder, was damit identisch und reciprok

ist, sollen die drei Axen des Kräftepaars, der Figur und der instantanen Drehung fortwährend in einer Ebene bleiben, so gibt es im günstigsten Falle nur zwei Annahmen, welche eine Lösung des Rotationsproblems in diesem Sinne herbeizuführen im Stande wären,

erstens die Annahme, es möge jener Antheil des Kräftepaares gleich Null sein, die Kräftepaaraxe also stets senkrecht der Figuraxe liegen,

zweitens die Annahme, es möge während des ganzen Verlaufs der Drehung auch die um die Figuraxe wirkende Grösse der instantanen Drehung constant bleiben.

Eine allgemeine Lösung des Rotationsproblems für $\varrho = \varrho_0$, ohne eine dieser zwei beschränkenden Bedingungen, erscheint von vorneherein ausgeschlossen.

Bevor wir zur Erörterung der beiden soeben ermittelten Bedingungen schreiten, wollen wir jedoch erst noch eine allgemeine Betrachtung einschieben.

§ 13.

Der allgemeine Fall $\varrho' = 0$, $P = 0$.

Es wurde ja im vorhergehenden Abschnitte erwähnt, dass, falls $\varrho' = 0$ eine Lösung des Rotationsproblems mit sich führte, nicht sowohl

$$\varrho' = 0 \ (\varrho = \varrho_0); \ \mathrm{R} = 0,$$

als vielmehr die überschriebene Zusammengehörigkeit

$$\varrho' = 0 \ (\varrho = \varrho_0); \ \boldsymbol{P} = 0$$

diese Lösung definiren müsse: ferner, dass, falls $\boldsymbol{P} = 0$ eine Integralgleichung des Systems (7) oder auch (6) vorstelle, nothwendig

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{dt}} = 0$$

sich als blosse algebraische Folge von $P = 0$ und der im Sinne $\varrho = \varrho_0$ vereinfachten Differentialgleichungen (7) oder (6) zu erweisen gezwungen sei.

Nun ist

$$P = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ Ap & Bq & Cr \\ p & q & r \end{vmatrix} = 0,$$

also

$$\frac{dP}{dt} = \Sigma \frac{dAp}{dt} \cdot \left\{ \begin{vmatrix} q & r \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} + \frac{1}{A} \cdot \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ Bq & Cr \end{vmatrix} \right\}$$

In diese Gleichung führe man die Werthe für die Differentialquotienten

$$\frac{dAp}{dt}, \frac{dBq}{dt}, \frac{dCr}{dt}$$

aus den Gleichungen (6) ein, so fliesst daraus, wenn man für die Unterdeterminanten von N in (6) deren Werthe schreibt:

$$\frac{dP}{dt} = \Sigma \begin{vmatrix} q & r \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} Bq & Cr \\ q & r \end{vmatrix} - \frac{PN\lambda}{N_1} \cdot \Sigma \begin{vmatrix} q & r \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} Bq & Cr \\ \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

$$+ \Sigma \frac{1}{A} \cdot \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ Bq & Cr \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} Bq & Cr \\ q & r \end{vmatrix} - \frac{P\varrho_0 \sqrt{N}}{N_1} \cdot \Sigma \frac{\alpha}{A} \cdot \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ Bq & Cr \end{vmatrix} + \frac{PN\lambda}{N_1} \cdot \Sigma \frac{1}{A} \cdot \begin{vmatrix} Bq & Cr \\ \beta & \gamma \end{vmatrix}^2$$

Unter Beachtung der Beziehungen (8) oder der Einführungen (4) folgt zunächst

$$\frac{dP}{dt} = (\mu_1 \sigma - \varrho_0 \tau) - \frac{PN\lambda}{N_1} (\mu_1 - \varrho_0 \sigma) + \Sigma \frac{1}{A} \begin{vmatrix} \varrho_0 - Ap\alpha & \sigma - p\alpha \\ \nu - A^2p^2 & \mu_1 - Ap^2 \end{vmatrix}$$

$$- \frac{P\varrho_0 \sqrt{N}}{N_1} \cdot \Sigma \frac{\alpha}{A} \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ Bq & Cr \end{vmatrix} + \frac{PN\lambda}{N_1} \cdot \Sigma \frac{1}{A} \begin{vmatrix} \nu - A^2p^2 & \varrho_0 - Ap\alpha \\ \varrho_0 - Ap\alpha & 1 - \alpha^2 \end{vmatrix}$$

In dieser Gleichung bedeuten N die bekannte Determinante und $N\lambda$, N_1 deren Unterdeterminanten, wie gelegentlich der Gleichungen (6) erwähnt, also

$$N = (\nu - \varrho_0^2)(1 - \mu^2) - (\lambda - \mu\varrho_0)^2$$

$$N\lambda = \lambda - \mu\varrho_0$$
$$N_1 = \nu - \varrho_0^2,$$

es erübrigt also nur noch, jene Combinationen von p, q, r in der vorstehenden Relation, welchen keine einfache Deutung in ν, ϱ_0, μ_1, σ, τ der Gleichungen (4) zukommt, durch eben diese Grösse auszudrücken. Es sind dies nur zwei Combinationen, denn die Relation vereinfacht sich weiter zu

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = (\mu_1\sigma - \varrho_0\tau) - \frac{PN\lambda}{N_1}(\mu_1 - \varrho_0\sigma) + (\mu_1 - \nu\sigma)\,\Sigma\frac{1}{A}$$
$$+ \nu\,\Sigma\frac{\alpha p}{A} - \varrho_0\tau + \frac{PN\lambda}{N_1}(2\varrho_0\sigma - \mu_1) + PN\lambda\,\Sigma\frac{1}{A} - \frac{PN\lambda}{N_1}\nu\,\Sigma\frac{\alpha^2}{A}$$
$$- \frac{P\varrho_0\sqrt{N}}{N_1}\,\Sigma\frac{\alpha}{A}\begin{vmatrix}\beta & \gamma\\ Bq & Cr\end{vmatrix}$$
$$= (\mu_1\sigma - 2\varrho_0\tau) - \frac{P(\lambda - \mu\varrho_0)}{\nu - \varrho_0^2}(2\mu_1 - 3\varrho_0\sigma) + [(\mu_1\varrho_0 - \nu\sigma) +$$
$$P(\lambda - \mu\varrho_0)]\,\Sigma\frac{1}{A} + \nu\,\Sigma\frac{\alpha p}{A} - \frac{P(\lambda - \mu\varrho_0)}{\nu - \varrho_0^2}\,\nu\,\Sigma\frac{\alpha^2}{A} - \frac{P\varrho_0\sqrt{N}}{\nu - \varrho_0^2}$$
$$\Sigma\frac{\alpha}{A}(\beta Cr - \gamma Bq).$$

Benützt man jetzt die Werthe von p, q, r, wie sie sich unter dem Einflusse von $\boldsymbol{P} = 0$ durch die Gleichungen (18) darstellen, zugleich aber auch die Relationen (19), so kommt

$$\Sigma\frac{\gamma r}{C} = \frac{\sigma}{F}\cdot\frac{H - \eta(DH - F) + \eta^2(EH - DF - FG)}{1 - \eta(D - G) + \eta^2 H}$$
$$\Sigma\frac{\alpha}{A}(\beta Cr - \gamma Bq) = \frac{\alpha\beta\gamma\,\Delta\,\sigma}{F}\cdot\frac{1}{1 - \eta(D - G) + \eta^2 H}$$

Lassen wir die Grösse

$$\eta = \frac{\mu_1 - \varrho\sigma}{\nu - \varrho_0^2},$$

welche durch die Gleichungen (14) und (15) definirt und gegeben ist, bestehen, so erhalten wir als Bedingung, dass

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = 0$$

sei, in ν, ϱ_0, μ_1, σ und τ geschrieben, folgende allgemeine Relation:

$$(24)\quad 0 = \begin{cases} \mathrm{F}(\mu_1 \sigma - 2\varrho_0 \tau) + \mathrm{E}\,[(\mu_1 \varrho_0 - \nu\sigma) + \mathrm{P}(\lambda - \mu\varrho_0)] - \\ \qquad \mathrm{FP}\dfrac{\lambda - \mu\varrho_0}{\nu - \varrho_0{}^2}(2\mu_1 - 3\varrho_0\sigma) - \mathrm{HP}\dfrac{\lambda - \mu\varrho_0}{\nu - \varrho_0{}^2}\nu + \\ \nu\sigma(\nu - \varrho_0{}^2)\,[\mathrm{H} - \eta\,\mathrm{DH} - \mathrm{F}) + \eta^2(\mathrm{EH} - \mathrm{DF} + \mathrm{FG})] - \\ \dfrac{\mathrm{P}\alpha\beta\gamma\, \varDelta\, \varrho_0 \sqrt{(\nu - \varrho_0{}^2)(1 - \mu^2) - (\lambda - \mu\varrho_0)^2}}{(\nu - \varrho_0{}^2)\,[1 - \eta\,(\mathrm{D} - \mathrm{G}) + \eta^2\,\mathrm{H}]} \end{cases}$$

Dies wäre also die Bedingung, welche neben den Gleichungen (13), insbesondere neben

$\varrho = \varrho_0$ und $\mathrm{R} = (\nu - \varrho_0{}^2)\,(\tau - \sigma^2) - (\mu_1 - \varrho_0\sigma) = 0$

noch zu erfüllen wäre, falls eine wirkliche Lösung des Rotationsproblems durch die Annahme $\varrho = \varrho_0$ in Betracht käme. Die Form derselben verkündet sofort die Unmöglichkeit einer Coincidenz mit $\mathrm{R} = 0$ für den allgemeinsten Fall $\varrho_0 = \varrho_0$, sie liefert im Gegentheile hiefür unzweifelhaft $\sigma = \sigma_0$. Doch wird die Untersuchung dieser Möglichkeit, wie auch der Eventualität $\varrho_0 = 0$, wohl besser direkt an den Euler'schen Gleichungen (6) sammt der zugehörigen Relation $P = 0$ vorgenommen denn an der unhandlichen Gleichung (29).

§ 14.

Die Annahme $\varrho = \varrho_0$, $\sigma = \sigma_0$.

Die Untersuchung des § 12 führte zu dem Ergebniss, dass die Möglichkeit einer Lösung der dynamischen Gleichungen für die Voraussetzung $\varrho' = 0$ nur in zwei Fällen Aussicht auf Realisirung habe. Der eine derselben wurde durch den Eintritt der Bedingung

$$\sigma' = 0,\ \sigma = \sigma_0$$

gleichzeitig neben $\varrho' = 0$, $\varrho = \varrho_0$ charakterisirt.

Für diese Bedingung liefert die dritte Differentialgleichung (13),

$$(\nu - \varrho_0^2)\, d\mu_1 = (\mu_1 - \varrho_0\, \sigma_0)\, d\nu$$

als Integral

$$\frac{\mu_1 - \varrho_0\, \sigma_0}{\nu - \varrho_0^2} = \text{const.}$$

Der linksseitige Bruch ist aber nichts anderes als die Grösse (14) η, also wird

$$\eta = \eta_0 = \text{const.},$$

was in der That mit dem Resultate der Gleichung (15) übereinstimmt, in dieser $\sigma = \sigma_0$ gesetzt — so dass also eine eigentliche Bedingungsgleichung, aus welcher σ_0 zu bestimmen wäre, hiedurch nicht geliefert wird. Es wird im Gegentheil erst η_0 bestimmt, sobald σ_0 gegeben vorliegt.

Dagegen kann die Relation (20) in der angedeuteten Richtung zum Ziele führen. Dieselbe liefert entweder

$$\nu = \nu_0 = \text{const.},$$

was in Verbindung mit

$$\varrho = \varrho_0 \text{ const.}$$

auf den Fall $\nu' = 0,\ \varrho' = 0$

des § 18 hinführt, oder es muss, damit $\nu - \varrho_0^2$ nicht constant werde, Zähler und Nenner der rechten Seite der Gleichung (20) den Werth 0 annehmen. Man erhielte so zwei Gleichungen für η, in welche dessen Werth aus (15) substituirt, nicht nur eine Gleichung zur Bestimmung von σ erscheinen liesse, sondern eventuell noch eine zweite Gleichung, die dann Anlass gäbe zu einer Relation zwischen den Constanten A, B, C, α, β, γ des Körpers selbst. Die gedachte Substitution von η würde freilich in der Wirklichkeit sehr complicirte Ausdrücke im Gefolge haben, während die Voraussetzung $\sigma = \sigma_0$ sich leichter direkt, auf Grund der Bedeutung von ϱ_0, σ_0 der Gleichungen (4) und der verschwindenden Determinante (7) P, aufstellen lässt.

Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} &A\alpha p + B\beta q + C\gamma r = \varrho_0 \\ (25)\qquad &\alpha p + \beta q + \gamma r = \sigma_0 \\ &\gamma (A - B)\, pq + \alpha (B - C)\, qr + \beta (C - A)\, rp = 0\ (= P) \end{aligned}$$

können nämlich die Grössen p, q, r der Winkelgeschwindigkeit gefunden werden als die Wurzeln je einer quadratischen Gleichung der folgenden Form

(26) $$r^2\gamma(A-C)(B-C)+r[(\varrho_0-A\sigma_0)(B-C)(1-\beta^2)+(\varrho_0-B\sigma_0)(A-C)(1-\alpha^2)]+\gamma(\varrho_0-A\sigma_0)(\varrho_0-B\sigma_0)=0.$$

Andererseits müssen, wenn während des ganzen Verlaufes der Drehung σ constant bleiben soll, die Annahmen $\varrho'=0$, $P'=0$, $P=0$ $(\varrho=\varrho_0,\ \sigma=\sigma_0)$ sich zu einer algebraischen Folgerung $\sigma'=0$ combiniren lassen.

$$\varrho'=0=A\alpha\, p'+B\beta q'+C\gamma r'$$
$$\sigma'=0=\alpha p'+\beta q'+\gamma r'$$
$$P'=0=[\gamma(A-B)q-\beta(A-C)r]p'+[\alpha(B-C)r-\gamma(B-A)p]q'+[\beta(C-A)p-\alpha(C-B)q]r'$$

liefern aber als erste Bedingung für die Möglichkeit der Existenz von p', q', r'

$$\begin{vmatrix} A\alpha & \alpha & \gamma(A-B)q-\beta(A-C)r \\ B\beta & \beta & \alpha(B-C)r-\gamma(B-A)p \\ C\gamma & \gamma & \beta(C-A)p-\alpha(C-B)q \end{vmatrix}=0$$

Um den Werth dieser Determinante, der besonders von der Gleichung $P=0$ beeinflusst wird, bequemer zu erhalten, multipliciren wir dieselbe mit der Hilfsdeterminante

$$\begin{vmatrix} \frac{B-C}{\alpha} & \frac{B-C}{A\alpha} & p \\ \frac{C-A}{\beta} & \frac{C-A}{B\beta} & q \\ \frac{A-B}{\gamma} & \frac{A-B}{C\gamma} & r \end{vmatrix},$$

deren Werth nicht als Null genommen werden kann, und erhalten

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \Sigma(A-B)(B-C)q\left[\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha}{\gamma}\right] \\ 0 & \Sigma BC(B-C) & \Sigma B(A-B)(B-C)q\left[\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha}{\gamma}\right] \\ \varrho_0 & \sigma_0 & 2P \end{vmatrix}=0,$$

was eintritt für

(27) $\varrho_0 . \Sigma BC(B-C) . \Sigma (A-B)(B-C) \beta q (1-\beta^2) = 0.$

Da der Fall $\varrho_0 = 0$ für den vorliegenden Paragraphen ausser Betracht bleiben soll, so kommt also nur die Möglichkeit in Frage, dass der zweite oder dritte Faktor des linksseitigen Produktes gleich Null sei; repräsentirt wird die eine oder andere Möglichkeit durch

I. $A = B.$

II. $\Sigma (A - B)(B - C) \beta (1 - \beta^2) q = 0.$

I. Ist $A = B$, so reducirt sich die dritte Gleichung (25) für $\boldsymbol{P}$ auf

$$\boldsymbol{P} = 0 = r(\alpha q - \beta p),$$

welche erfüllt ist durch

1. $r = 0.$

2. $\alpha q - \beta p = 0$

ad 1. Für die Zugehörigkeit $A = B$, $r = 0$ wird

$$\varrho_0 = A(\alpha p + \beta q) = A\sigma_0,$$

so dass also von den drei Gleichungen des Systems (25) nur eine einzige zur Bestimmung von p, q übrig bleibt: p und q müssen sonach unbestimmt bleiben. In der That ergeben die Gleichungen (26) für $A = B$, $\varrho_0 = A\sigma_0$ als Werthe von r die Null, für p und q bezw. 0 : 0.

Die Gleichung $\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = 0$ geht hier einfach über in $\frac{dr}{dt} = 0$ und die Euler'schen Gleichungen (6) in

$$A\frac{dp}{dt} = \frac{P}{N_1}\left[(Ap - \alpha\varrho_0)\sqrt{N} - (\lambda - \mu\varrho_0) Aq\gamma\right]$$

$$A\frac{dq}{dt} = \frac{P}{N_1}\left[(Aq - \beta\varrho_0)\sqrt{N} + (\lambda - \mu\varrho_0) Ap\gamma\right]$$

$$0 = \frac{P}{N_1}\left[\qquad - \gamma\varrho_0\sqrt{N} - (\lambda - \mu\varrho_0)\begin{vmatrix} Ap & Aq \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}\right]$$

Von diesen drei Gleichungen liefert die dritte, solange an der Idee eines schweren starren, nicht um seinen Schwerpunkt rotirenden Körpers festgehalten wird ($P \gtrless 0$), eine Relation zwischen den Winkelgeschwindigkeiten p, q. Die

letztere liefert, mit der obigen Relation für ϱ_0 zusammen, ihrerseits sodann entweder $p = p_0$, $q = q_0$ — womit wegen $r = r_0 = 0$ nothwendig auch $\nu = \nu_0$, also der Fall $\nu' = 0$, $\varrho' = 0$ des § 18 gegeben wäre — oder sie ist eine blosse algebraische Folge der Relation für ϱ_0. Quadriren wir zum Zwecke der näheren Untersuchung, so fliesst unter Beachtung der Beziehungen (8)

$$\gamma^2 \varrho_0{}^2 N = (\lambda - \mu\varrho_0)^2 (\nu - \varrho_0{}^2)$$

oder durch Einführung des Werthes (9) der Determinante N

$$(\lambda - \mu\varrho_0)^2 [\nu - \varrho_0{}^2 (\alpha^2 + \beta^2)] = \gamma^2 \varrho_0{}^2 (\nu - \varrho_0{}^2) (1 - \mu^2).$$

Damit diese Gleichung eine blosse Folge von ϱ_0 wäre, dürfte sie für ν bezw. μ nicht bestehen bleiben; es müssten die Coëfficienten letzterer Grössen also consequenter Weise verschwinden. Dies ist nur möglich für

$$\varrho_0 = 0, \ \lambda = 0.$$

$\varrho = 0$ bleibt aber ein für allemal aus der Untersuchung dieses Abschnittes ausgeschlossen.

ad 2. Ist $A = B$ und $\alpha q - \beta p = 0$, so liefern die Gleichungen (25)

$$p = \alpha \frac{C\sigma_0 - \varrho_0}{(a^2 + \beta^2)(C - A)}$$

$$q = \beta \frac{C\sigma_0 - \varrho_0}{(\alpha^2 + \beta^2)(C - A)}$$

Damit auch hier nicht p und q Constante werden und als solche constante Werthe von r, ν, μ nach sich ziehen, muss eine der beiden Voraussetzungen Giltigkeit bekommen:

$$C = A \text{ oder } \alpha = \beta = 0.$$

Denn in beiden Fällen ist dann $\varrho_0 = C\sigma_0$ und es werden p, q beide unbestimmt, wie auch die allgemeinen Gleichungen (26) anzeigen.

$C = A$ $(= B)$ documentirt die Gleichheit der drei Hauptträgheitsmomente des rotirenden Körpers und sonach (vgl. § 7) einen Unterfall von

$\alpha = \beta = 0$ $(A = B)$, dem allgemeinen Fall des Gyroscops.

Damit ist die erste der obigen Unterscheidungen (27) erledigt, und wir beginnen mit der anderen,

II. $(A - B)(A - C)\,\alpha\,(1 - \alpha^2)\,p + (B - C)(B - A)\,\beta\,(1 - \beta^2)\,q + (C - A)(C - B)\,\gamma\,(1 - \gamma^2)\,r = 0.$

Nicht genug, dass aus den drei Gleichungen (26) p, q, r im allgemeinen als Constante geliefert werden, wird durch den Eintritt dieser Bedingung sogar noch eine Ueberbestimmung hervorgerufen. Nun kann aber von den drei Grössen p, q, r überhaupt nur eine einzige constant sein, weil zwei derselben, constant vorausgesetzt, zufolge der Gleichung für ϱ_0 nothwendig auch die Dritte constant und somit den hier auszuschliessenden Fall $\nu = \nu_0$ ergeben würden.

Nehmen wir als diese ausgezeichnete Grösse r, so müssen die Werthe von p und q der Gleichungen (26) wieder unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheinen. Jene Gleichungen heissen

$$p^2\alpha\,(B - A)(C - A) + p\,[(\varrho_0 - B\sigma_0)(C - A)(1 - \gamma^2) + (\varrho_0 - C\sigma_0)(B - A)(1 - \beta^2)] + \alpha\,(\varrho_0 - B\sigma_0)(\varrho_0 - C\sigma_0) = 0$$

$$q^2\beta\,(C - B)(A - B) + q\,[(\varrho_0 - C\sigma_0)(A - B)(1 - \alpha^2) + (\varrho_0 - A\sigma)(C - B)(1 - \gamma^2)] + \beta\,(\varrho_0 - C\sigma_0)(\varrho_0 - A\sigma_0) = 0;$$

sie werden illusorisch für

$$A = B = C \text{ oder } A = B,\ \alpha = \beta = 0$$

d. h. also wieder für den Fall der gyroscopischen Bewegung. Auch die überschriebene Bedingung II wird für jede dieser Annahmen befriedigt.

Fassen wir die Resultate zusammen, auf welche die Untersuchungen dieses Paragraphen geführt haben, so können wir im Anschlusse an die zwei am Ende des § 12 offen gelassenen Möglichkeiten behaupten:

Die Voraussetzung, es möge für die ganze Zeitdauer der Drehung des schweren starren Körpers neben dem Antheile des Kräftepaars längs der Figuraxe auch der Antheil der Drehgeschwindigkeit längs dieser Axe constant bleiben, führt auf eine Lösung des Rotationsproblems nur im Falle des Gyroscops d. i. eines

schweren Umdrehungskörpers mit einem festen Punkte auf seiner Symmetrieaxe.

Die Lösung dieser bekannten Bewegungsart besitzt den Charakter einer singulären Lösung.

§ 15.

Die Annahme $\varrho_0 = 0$.

Unter der speciellen Annahme $\varrho_0 = 0$ kann die dritte Differentialgleichung (13) ebenfalls wieder ohne Weiteres integrirt werden. Sie liefert $\frac{\mu_1}{\nu}$ = constant, während die Gleichung (14) $\frac{\mu_1}{\nu} = \eta$ gibt. Es muss also $\eta = \eta_0$ = const. sein. Dies ist auch der Fall, indem aus der Gleichung (15) im Falle $\varrho_0 = 0$ die Grösse σ vollständig entschwindet.

Die Gleichung (20) ergibt, da jetzt η constant ist, ν direkt proportional σ^2; ebenso ist nach Obigem auch μ_1 proportional diesem Quadrate, so dass die erste Differentialgleichung (13)

$$\frac{d\nu}{dt} = 2P \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \mu \\ \lambda & \nu & \varrho_0 \\ \mu & \varrho_0 & 1 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

ein hyperelliptisches Differential zeigt. Damit wäre das Rotationsproblem auf eine Quadratur zurückgeführt, die Berechtigung der Gleichung (9) $R = 0$, aus welcher der Werth (15) von η entstammte, als Integralgleichung des Systems (13) vorausgesetzt.

Aber auch hier ist wiederum zu prüfen die Zusammengehörigkeit

$$(28)\quad \begin{aligned} \varrho_0 &= 0 = A\alpha p + B\beta q + C\gamma r \\ \boldsymbol{P} &= 0 = \gamma(A - B)\,pq + \alpha(B - C)\,qr + \beta(C - A)\,rp. \end{aligned}$$

Aus ihr ergeben sich offenbar

$$(29)\qquad \begin{aligned} Ap &= \boldsymbol{A} \,.\, Cr \\ Bq &= \boldsymbol{B} \,.\, Cr, \end{aligned}$$

worin $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ zwei Constante bedeuten, die den Gleichungen

$$(30)\quad \begin{gathered} \alpha \boldsymbol{A} + \beta \boldsymbol{B} + \gamma = 0 \\ (A - B)\, C\gamma \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + (B - C)\, A\alpha \boldsymbol{B} + (C - A)\, B\beta \boldsymbol{A} = 0 \end{gathered}$$

oder auch

$$(31)\quad \begin{gathered} \boldsymbol{A}^2 (A-B)\, C\alpha\gamma + \boldsymbol{A} [C\gamma^2 (A-B) + A\alpha^2 (B-C) \\ - B\beta^2 (C - A)] + A (B - C)\, \alpha\gamma = 0 \\ \boldsymbol{B}^2 (B-A)\, C\beta\gamma + \boldsymbol{B} [C\gamma^2 (B-A) + B\beta^2 (A-C) \\ - A\alpha^2 (C - B)] + B (A - C)\, \beta\gamma = 0 \end{gathered}$$

Genüge leisten.

Die Differentiation der Gleichungen (29) ergibt

$$\frac{dAp}{dt} = \boldsymbol{A} \frac{dCr}{dt}$$
$$\frac{dBq}{dt} = \boldsymbol{B} \frac{dCr}{dt},$$

es folgt also aus den Euler'schen Bewegungsgleichungen (6) unter Weglassung von $\varrho_0 = 0$

$$(32)\quad \begin{gathered} \frac{\boldsymbol{A}}{A} r \left[(C - A) - \frac{(A - B)\, C}{B} \boldsymbol{B}^2\right] \\ - \frac{P\lambda}{\nu} \left[(\alpha - \boldsymbol{A}\gamma) - \boldsymbol{B} (\boldsymbol{A}\beta - \boldsymbol{B}\alpha)\right] = 0 \\ \frac{\boldsymbol{B}}{B} r \left[(B - C) - \frac{(A - B)\, C}{A} \boldsymbol{A}^2\right] \\ - \frac{P\lambda}{\nu} \left[(\boldsymbol{B}\gamma - \beta) - \boldsymbol{A} (\boldsymbol{A}\beta - \boldsymbol{B}\alpha)\right] = 0 \end{gathered}$$

Hierin bedeutet

$$\nu = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = C^2r^2 (1 + \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2),$$

und es bleibt die Darstellung (29) bis (32) solange in Giltigkeit, als nicht eine der Grössen $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, oder beide, unbestimmt werden.

Den letzteren Fall vorerst völlig ausgeschlossen, können auf Grund der Gleichungen (32) nun folgende Hauptunterscheidungen getroffen werden:

I. Es ist die Grösse der Winkelgeschwindigkeit um eine Hauptträgheitsaxe — hier r — constant.

II. Es ist dieser Betrag keine Constante.

I. Ist $r = r_0$, so ist zufolge der Gleichungen (29) auch $p = p_0$, $q = q_0$, somit weiterhin $\nu = \nu_0$ — es liegt also der Fall $\nu = 0$, $\varrho' = 0$ vor, welcher in § 18 auf seine Berechtigung geprüft werden wird.

II. Ist r nicht constant, so müssen die Coëfficienten in den Gleichungen (32) alle einzeln verschwinden.

Von dem Falle $P = 0$ der Bewegung um den Schwerpunkt abgesehen (s. § 7) tritt das Nullwerden ein für

1. $\boldsymbol{A} = 0 \quad \boldsymbol{B} = 0 \quad \lambda = 0$
2. $\boldsymbol{A} = 0 \quad \boldsymbol{B} = 0 \quad \alpha = \beta = 0$
3. $\boldsymbol{A} = 0 \quad B = C \quad \lambda = 0$
4. $\boldsymbol{A} = 0 \quad B = C \quad \boldsymbol{B}\gamma - \beta = 0,\ \alpha\,(1 + \boldsymbol{B}^2) = 0$

$$5. \begin{cases} (B - C) - \dfrac{(A - B)\,C}{B}\,\boldsymbol{A}^2 = 0 & \boldsymbol{B}\gamma - \beta - \boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{A}\beta - \boldsymbol{B}\alpha) = 0 \\ (C - A) - \dfrac{(A - B)\,C}{B}\,\boldsymbol{B}^2 = 0 & \alpha - \boldsymbol{A}\gamma - \boldsymbol{B}\,(\boldsymbol{A}\beta - \boldsymbol{B}\alpha) = 0 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} (B - C) - \dfrac{(A - B)\,C}{B}\,\boldsymbol{A}^2 = 0 \\ (C - A) - \dfrac{(A - B)\,C}{A}\,\boldsymbol{B}^2 = 0 \end{cases} \quad \lambda = 0$$

1. $\boldsymbol{A} = 0$, $\boldsymbol{B} = 0$ reduciren die Gleichungen (29) zu $p = q = 0$; aus der ersten Gleichung (28) folgt dann entweder $r = 0$, was im Vereine mit $p = q = 0$ gar keine Drehung repräsentiren würde und als specieller Werth von $r =$ const. ohnehin hier auszuschliessen ist, oder aber $\gamma = 0$.

$\lambda = 0$, $p = q = 0$, $\gamma = 0$ lassen von den Euler'schen Gleichungen (6) nur die folgende bestehen:

$$\frac{dCr}{dt} = \frac{P}{\nu} \cdot Cr \sqrt{N}$$

Die Determinante (9) N schreibt sich für $\varrho_0 = 0$, $\lambda = 0$

$$N = \nu\,(1 - \mu^2)$$

und es ist

$$\nu = C^2 r^2 = C\,(2P\mu + h),$$

also geht die vorstehende Differentialgleichung über in

$$(33) \qquad \sqrt{C} \cdot \frac{d\mu}{dt} = \sqrt{(1 - \mu^2)(2P\mu + h)}$$

d. h. in die Differentialgleichung für die Bewegung des zusammengesetzten Pendels.

In der That definiren die Bedingungen $\varrho_0 = 0$, $\lambda = 0$, $\gamma = 0$; $p = q = 0$ geometrisch die Pendelbewegung.

2. $A = 0$, $B = 0$, $\alpha = \beta = 0$ zu realisiren ist unmöglich: nachdem $A = B = 0$ als Consequenzen mit sich brachten $p = 0$, $q = 0$, und diese $\gamma = 0$, kann nicht mehr β mit α gleichzeitig verschwinden.

3. $A = 0$, $B = C$, $\lambda = 0$ ergeben aus den Gleichungen (29) und (28) $p = 0$, $\beta q + \gamma r = 0$, und führen die Euler'schen Gleichungen (6) über in

$$\frac{dq}{dt} = \frac{P}{\nu} q \sqrt{N}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{P}{\nu} r \sqrt{N},$$

welche thatsächlich das Verhältniss $q : r$ constant liefern. Weiterhin schreibt sich

$$\frac{1}{2} \frac{d(q^2 + r^2)}{dt} = \frac{P}{\nu} (q^2 + r^2) \sqrt{N}$$

und wegen

$$\nu = C^2 (q^2 + r^2) = C (2P\mu + h)$$

$$(34) \qquad \sqrt{C} \cdot \frac{d\mu}{dt} = \sqrt{(1 - \mu^2)(2P\mu + h)}$$

Diese Gleichung stimmt mit der Differentialgleichung (33) vollständig überein, sie charakterisirt eben auch, wie die geometrische Interpretation der Bedingungen beweist, die Bewegung eines Pendels.

4. $A = 0$, $B = C$, $B\gamma - \beta = 0$, $\alpha (1 + B^2) = 0$.

Ist $A = 0$, so liefert die erste der Relationen (30) $B = -\frac{\gamma}{\beta}$, was mit den vorstehenden Bedingungen nur verträglich ist, wenn $\beta = \gamma = 0$ ist.

$B = C$, $\beta = \gamma = 0$ erweisen aber diesen Fall als denjenigen des Gyroscops.

$$5.\ 6.\quad (B - C)\,\frac{(A - B)\,C}{A}\,\boldsymbol{A}^2 = 0$$

$$(C - A)\,\frac{(A - B)\,C}{B}\,\boldsymbol{B}^2 = 0$$

liefern die Beziehung

$$1 + \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2 = 0$$

Da es mit der Idee der Drehung unvereinbar ist, dass Ap, Bq, Cr imaginäre Werthe annehmen, so können also auch die Grössen (29)

$$\frac{Ap}{Cr} = \boldsymbol{A},\ \frac{Bq}{Cr} = \boldsymbol{B}$$

unmöglich imaginär sein. Es ist sonach der vorliegende Fall nur zu verwirklichen für

$$A = B = C$$

d. i. wieder für eine (nach § 7 speciellere) gyroscopische Bewegung.

Die bisherigen Erörterungen fussten alle auf der Annahme, dass von den Grössen $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, wie sie durch die Beziehungen (29) bis (31) definirt werden, keine illusorisch werde. Tritt letzterer Fall ein, so besitzen jene Beziehungen und insbesondere die Gleichung (33) keine Giltigkeit mehr, und man ist gezwungen, auf die Euler'schen Gleichungen (6) direkt zurückzugreifen.

Sei zunächst $\boldsymbol{A}$ unbestimmbar, während $\boldsymbol{B}$ noch einen angebbaren Werth besitze!

Dann müssen von der ersten Gleichung (31) die zu den $\boldsymbol{A}$ gehörigen Coëfficienten einzeln verschwinden, während die für $\boldsymbol{B}$ analogen der zweiten Gleichung zum Theile wenigstens erhalten bleiben müssen. Diese Bedingungen werden nur erfüllt für

$$(35)\quad \alpha = 0 \quad C\gamma^2\,(A - B) + B\beta^2\,(A - C) = 0$$

Entnimmt man aus den Festsetzungen (19) die Bezeichnung G für das Trägheitsmoment des Körpers um die Figuraxe,

$$G = \Sigma A\alpha^2 = B\beta^2 + C\gamma^2,$$

so kann auch geschrieben werden

$$(35a) \qquad \alpha = 0 \qquad AG = BC.$$

Dass für diese Annahmen in der That Λ sich als unbestimmbar erweist, kann man auch direkt aus den Gleichungen (28) erkennen, die für $\alpha = 0$ die Form annehmen

$$Bq\beta + Cr\gamma = 0$$

$$p\,[(A - B)\,\gamma q + (C - A)\,\beta r] = 0$$

und sich sonach in die zwei Möglichkeiten theilen

$$(36) \qquad p = 0 \qquad Bq\beta + Cr\gamma = 0,$$

$$(37) \left\{ \begin{array}{l} Bq\beta + Cr\gamma = 0 \\ (A - B)\,\gamma q + (C - A)\,\beta r = 0 \end{array} \right.$$

Die zwei letzteren Gleichungen enthalten die Grösse p gar nicht, es ist also das Verhältniss Ap : Cr d. i. Λ effektiv unbestimmt; überdiess sind dieselben mit einander verträglich, denn die zu q, r gehörige Determinante verschwindet, unserer zweiten Bedingung (35) zufolge.

Knüpfen wir zunächst an die Existenz der Gleichungen (36) an, so schreiben sich die Euler'schen Bewegungsgleichungen (6) für $\varrho_0 = 0$, $\alpha = 0$, $p = 0$, wie folgt:

$$0 = (B - C)\,qr + \frac{P}{\nu}\,[-\lambda\,(Bq\gamma - Cr\beta)]$$

$$B\,\frac{dq}{dt} = \qquad \frac{P}{\nu}\,[Bq\,\sqrt{N}]$$

$$C\,\frac{dr}{dt} = \qquad \frac{P}{\nu}\,[Cr\,\sqrt{N}]$$

Die Combination der zwei letzteren Gleichungen liefert das Verhältniss Bq : Cr constant, wie es nach der zweiten Relation (36) sich ergeben muss. Damit aber die erste der vorstehenden Gleichungen nicht q oder r selbst constant liefert und hiemit auf $\nu = \nu_0$, also $\varrho' = 0$, $\nu' = 0$ (s. § 18) hinführt, muss unbedingt statt haben

$$B = C \quad \lambda = 0$$

Die Bedingungen $\alpha = 0$, $B = C$, $\lambda = 0$ charakterisiren aber den bereits (34) besprochenen Fall der Pendelbewegung.

Werden hingegen neben $\varrho = 0$, $\alpha = 0$ die gleichwerthigen Annahmen (37) beigezogen, so folgt für die Euler'schen Gleichungen (6)

$$
\begin{aligned}
& A \frac{dp}{dt} = (B - C)\, qr + \frac{P}{\nu} [Ap \sqrt{N} - \lambda\, (Bq\gamma - Cr\beta)] \\
(38)\quad & B \frac{dq}{dt} = (C - A)\, rp + \frac{P}{\nu} [Bq \sqrt{N} + \lambda\, Ap\gamma] \\
& C \frac{dr}{dt} = (A - B)\, pq + \frac{P}{\nu} [Cr \sqrt{N} - \lambda\, Ap\beta]
\end{aligned}
$$

Multiplicirt man die zwei letzten dieser Gleichungen mit β und γ oder auch mit $\gamma\, (A - B) : B$ und $\beta\, (C - A) : C$ und addirt, so kommt unter Beachtung von (37) jedesmal die Identität $0 = 0$, oder es ist das Verhältniss $Bq : Cr$ ein constantes [1]).

Somit reduciren sich die drei dynamischen Gleichungen (38) auf nur zwei, welche dann ihrerseits zur Ermittelung einer der Grössen Bq oder Cr, sowie der dritten Variabeln Ap dienen können.

Um aus den gedachten zwei Differentialgleichungen ein Integral gewinnen zu können, nehmen wir die Combination zu Hilfe, welche die erste der Gleichungen (9), mit der Determinante N, hervorgerufen hat. Nur schreibt sich hier für $\varrho_0 = 0$ einfacher

$$
\frac{d\nu}{dt} = 2P \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \mu \\ \lambda & \nu & 0 \\ \mu & 0 & 1 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} = 2P \sqrt{\nu\, (1 - \mu^2) - \lambda^2}
$$

[1]) Damit ist einer allgemeinen Bedingung genügt, welche eine Lösung eines Systems von Differentialgleichungen erfüllen muss. (vgl. M. 380). Es erweist sich unter Beachtung der zweiten Annahme (35) die Gleichung $\frac{d(Bq\beta + Cr\gamma)}{dt} = 0$ in der That als eine blosse algebraische Folge von $Bq\beta + Cr\gamma = 0$.

$$\text{III. } \nu - \varrho^2 = 0;\ \text{IV. } \frac{d\nu}{dt} = 0 \text{ und } \frac{d\varrho}{dt} = 0$$

auf integrirende Lösungen des Gleichungssystems (10) zu untersuchen. Wie schon in dem Vorwort erwähnt, wird letztere Untersuchung Gegenstand des nächstjährigen wissenschaftlichen Programmes werden.

